2022-2023 学年第二学期高等代数与解析几何 2-2

期末考试试题 A

1. （15 分）已知二次曲面 $2{x_1}^2+a{x_2}^2+2{x_3}^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=3$ 经正交线性替换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$化为椭球面${y_1}^2+{y_2}^2+b{y_3}^2=3$，求$a,b$的值及正交矩阵$T$。

2. （15 分）设P为数域，在$P^{2\times 2}$中令

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x & -x\\ y & z\end{pmatrix}\middle|x,y,z\in P\right\}，V_1=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -a & c\end{pmatrix}\middle|a,b,c\in P\right\}$$

(1)证明：V_1,V_2均为$P^{2\times 2}$子空间；

(2)求V_1+V_2及$V_1\cap V_2$的维数与一组基。

3. （15 分）设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

求A的特征多项式与最小多项式以及$Jordan$标准形。

4. （15 分）求直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$绕$z$轴旋转所产生的曲面方程。

5. （15 分）设σ为数域P上线性空间V中的线性变换，满足$\sigma^2=\sigma$，

(1)证明：$V=\sigma(v)\oplus\sigma^{-1}(0)$；

(2)证明：若τ是V中与σ可交换的线性变换，则$\sigma(v),\sigma^{-1}(0)$均为τ的不变子空间。

6. （15 分）求单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$上两条互相垂直的直母线交点的轨迹方程。

7. （10 分）设A为n阶正定矩阵，B为n阶半正定矩阵，证明：$|A+B|\geq|A|+|B|$，当且仅当$B=0$等号成立。