

2023-2024 学年第二学期 高等代数与解析几何
第一次月考试题

一. (15 分) 用可逆线性替换将下述 4 元二次型化为标准形.

$$y^2 - 2w^2 - 2xy + 2yw - 2zw.$$

二. (15 分) 若 $a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$ 是正定的实二次型, 求 a 的取值范围.

三. (15 分) 设 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

(1) 证明 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 是 \mathbb{Q} 上的线性空间;

(2) 若 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]_3$ 中线性无关, 证明 $f_1(\sqrt[3]{2}), f_2(\sqrt[3]{2}), f_3(\sqrt[3]{2})$ 在 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ 中线性无关.

四. (15 分) 设 $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 7x_3 - 8x_4 = x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0\}$, $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_4 = 0\}$. 分别求 $U \cap W, U + W$ 的维数和一组基.

五. (15 分) 设 U 为数域 P 上 n 阶上三角矩阵构成的线性空间, W 为 n 阶反称矩阵构成的线性空间. 证明 $P^{n \times n} = U \oplus W$.

六. (15 分) 对于实对称矩阵 X , 用 $d(X)$ 表示 X 的符号差. 已知 A, B 分别为 m 阶和 n 阶实对称可逆矩阵, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 求证:

$$d(A - CB^{-1}C^T) + d(B) = d(B - C^T A^{-1}C) + d(A).$$

七. (10 分) 已知 V 是 \mathbb{R}^{2n} 的子空间, 且 $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x_k^2 = 0$ 对任意 $(x_1, x_2, \cdots, x_{2n}) \in V$ 成立, 求 $\dim(V)$ 的最大值.