2023-2024学年度第二学期高等代数与解析几何第三次月考试题(2024-5-23)

1 [25分]设$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

(1) 求出A的行列式因子, 不变因子, 初等因子及最小多项式.

(2) 求A的Jordan标准形J, 并求出可逆矩阵T使得$T^{-1}AT=J$.

2 [20分]设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

(1) 求正交变换$X=QY$, 将$f(X)$化成标准形.

(2) 证明:

$$\min_{x\neq 0}\frac{f(X)}{X^TX}=2.$$

3 [15分]设3阶实对称矩阵A的三个特征值为$-1,1,1$. 又A的与特征值-1相对应的一个特征向量为$p=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求$A$.

4 [10分]设A为n阶复矩阵. 证明: 存在复矩阵B,C, 使得$B^n=0$, C相似于对角矩阵, 且$A=B+C$.

5 [10分]设α是n维欧氏空间V的一个非零向量，$\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in V$满足:

$$(\alpha,\alpha_i)>0,\quad (\alpha_i,\alpha_j)\le 0,\quad \forall i\neq j.$$

证明: $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$是V的一组基.

6 [10分]设A,B都是n阶正交矩阵, 且$|A|+|B|=0$. 证明: $|A+B|=0$.

7 [10分]设A为n阶实对称矩阵, 且$|A|\neq 0$. 证明: A为正定矩阵的充要条件是对所有正定矩阵B, $\mathrm{tr}(AB)>0$.