有限群表示论期末测试(2024.6,时间:100分钟,命题人:常亮)

一.(15)设H是群G的正规子群,令$p = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h \in \mathbb{C}[G]$.

(1)证明:p是幂等元;

(2)证明:若ρ是群G的不可约表示,则$\rho(p) = id$或0.

二.(25)设$G = \langle a, b | a^6 = 1, a^3 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$,它的共轭类为$C_1 = \{1\}, C_2 = \{a^3\}, C_3 = \{a, a^5\}, C_4 = \{a^2, a^4\}, C_5 = \{b, a^2b, a^4b\}, C_6 = \{ab, a^3b, a^5b\}$.特征标表(不完全)如下:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
χ_1						
χ_2						
χ_3						
χ_4						
χ_5						
χ_6	2	2	-1	-1	0	0

(1)求$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$;

(2)这六个表示,哪些是忠实的,哪些可以在$\mathbb{R}$实现,说明理由.

三.(15)设ρ是S_3的表示,它作用在三维向量上是S_3中元素对坐标的置换.将$\rho\otimes\rho$分解为S_3的不可约表示的直和.

四.(15)将$\mathbb{C}[S_3]$分解为极小左理想的直和.

五.(15)证明:群G的特征标表的每一行元素之和为非负整数.

(编者注:这个貌似是$Brauer$论文中的一个结果,并不是显而易见的性质.$Brauer$的主要想法是用行的和在$Galois$群$E = Gal(\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})/\mathbb{Q})$作用下不变得到落在$\mathbb{Q}$中,再结合代数整数得到必为整数,然后分析得到非负.总之课上和作业没有见过类似做法,但是提前交卷的也多,不知道有没有简单方法...)

六.(15)(1)叙述有限群G的Frobenius互反律.(不必证明)

(2)设H是群G的子群,G和H的不可约表示的维数最大值分别记为n, m.证明:$m \le n$.

(编者注:根据网上的中科院代数与数论暑期学校的资料,实际上我们有$m \le n \le m\,[G:H]$.)