数学科学学院伯苓班2019 — 2020学年第二学期“数学分析3-2”期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、(每问10分，共30分) 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(1) 函数$f(x,y)$在$(0,0)$点是否连续？证明你的结论.
(2) 函数$f(x,y)$在$(0,0)$点是否可微？证明你的结论.
(3) 设$\vec{l}$=(1,2), 求方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0)$.

解 (1) 函数$f(x,y)$在$(0,0)$点连续. 证明如下. 当$x^2+y^2\neq 0$时，有

$$0\leqslant\left|\frac{x^2-2y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}\right|\leqslant\sqrt{x^2+2y^2}\leqslant\sqrt{2(x^2+y^2)}.$$

于是由两边夹定理知$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. 又$f(0,0)=0$, 故由连续的定义知函数$f(x,y)$在$(0,0)$点连续.

(2) 函数$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微. 证明如下. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{|x|}}{x}$$

不存在，所以$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$不存在. 因此函数$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微.

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(\frac{t}{\sqrt5},\frac{2t}{\sqrt5}\right)-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{-\frac{7t^2}{5}}{\frac{3t}{\sqrt5}}}{t}\\ &= -\frac{7}{3\sqrt5}\\ &= -\frac{7\sqrt5}{15}.\end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

二、(10分) 求不定积分$\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x \\
= &\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x \\
= &x \cdot \frac{1}{\ln x} - \int x \cdot \left(-\frac{1}{\ln^2 x}\right) \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x \\
= &\frac{x}{\ln x} + \int \frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x \\
= &\frac{x}{\ln x} + C,
\end{aligned}$$

其中C是任意常数.

得 分

三、(12分) 设x为由方程$x^2y + \mathrm{e}^{2x} + z = 0$在$(0,1,-1)$的一个邻域内确定的$y,z$的隐函数，求$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$在$(x,y,z) = (0,1,-1)$处的值.

解　等式$x^2y + \mathrm{e}^{2x} + z = 0$两边对$z$求偏导，得

$$2xy\frac{\partial x}{\partial z} + 2\mathrm{e}^{2x}\frac{\partial x}{\partial z} + 1 = 0.$$

将$(x,y,z) = (0,1,-1)$代入，得$2\frac{\partial x}{\partial z}(1,-1) + 1 = 0$, 故$\frac{\partial x}{\partial z}(1,-1) = -\frac{1}{2}$. 等式$2xy\frac{\partial x}{\partial z} + 2\mathrm{e}^{2x}\frac{\partial x}{\partial z} + 1 = 0$两边对$z$求偏导，得

$$2y\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 2xy\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + 4\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 2\mathrm{e}^{2x}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0.$$

将$(x,y,z) = (0,1,-1)$和$\frac{\partial x}{\partial z}(1,-1) = -\frac{1}{2}$代入，得

$$\frac{1}{2} + 1 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(1,-1) = 0.$$

解得$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(1,-1) = -\frac{3}{4}$.

草 稿 区

得 分

四、(12分) 求函数$f(x,y,z)=x-2y+2z$在有界闭区域$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|x^2+y^2+z^2\leqslant 9\right\}$上的最大值与最小值.

解　由$\nabla f(x,y,z)=(1,-2,2)$知$f(x,y,z)$没有无条件临界点. 下面来求$f(x,y,z)$在D的边界上的临界值，即在条件$x^2+y^2+z^2=9$下的临界值. 令拉格朗日函数$L(x,y,z)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-9)$, 由拉格朗日乘子法得方程组:

$$\begin{cases}1+2\lambda x=0,\\-2+2\lambda y=0,\\2+2\lambda z=0,\\x^2+y^2+z^2-9=0.\end{cases}$$

由前三个方程得$x=-\dfrac{1}{2\lambda}$, $y=\dfrac{1}{\lambda}$, $z=-\dfrac{1}{\lambda}$. 代入到最后一个方程，得

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}-9=0.$$

解得$\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$. 若$\lambda=\dfrac{1}{2}$, 则得到条件临界点$(-1,2,-2)$, 相应的条件临界值是-9; 若$\lambda=-\dfrac{1}{2}$, 则得到条件临界点$(1,-2,2)$, 相应的条件临界值是9.

由于$f(x,y,z)$在有界闭区域D上必有最大值和最小值, 且它们或者是在D内的临界值, 或者是在边界上的临界值, 所以$f(x,y,z)$在有界闭区域D上的最大值是9, 最小值是-9.

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}\right)^2\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{25}\right\}$, 求有界闭区域$D$的面积.

解 作广义极坐标变换$x=3r\cos\theta$, $y=4r\sin\theta$, 则$\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=12r$, $\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}\right)^2\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{25}$化为

$$r^4\leqslant\frac{9r^2\cos^2\theta+16r^2\sin^2\theta}{25}.$$

由此即知区域D变为

$$D'=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant r\leqslant\frac{\sqrt{9\cos^2\theta+16\sin^2\theta}}{5}\right\}.$$

因此，有界闭区域D的面积为

$$\begin{aligned}A&=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D'}12r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=12\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{9\cos^2\theta+16\sin^2\theta}}{5}}r\mathrm{d}r\\&=6\int_0^{2\pi}\frac{9\cos^2\theta+16\sin^2\theta}{25}\mathrm{d}\theta\\&=6\int_0^{2\pi}\frac{25-7\cos2\theta}{50}\mathrm{d}\theta\\&=6\cdot\frac{1}{2}\cdot2\pi-0\\&=6\pi.\end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

六、(10分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，对任意实数x，都有$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xf(x)$. 证明：$f(x)$是常数函数.

证 令$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则由微积分基本定理知对任意实数$x$, 有$F'(x) = f(x)$. 因为对任意实数$x$, 都有$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xf(x)$, 所以对任意实数$x$, 都有$F(x) = xF'(x)$. 于是当$x \neq 0$时，就有$\left(\frac{F(x)}{x}\right)' = \frac{xF'(x)-F(x)}{x^2} = 0$. 由此即知$\frac{F(x)}{x}$分别在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上是常数函数，即存在常数$C_1$和$C_2$, 使得$F(x) = \begin{cases} C_1x, & x<0, \\ C_2x, & x>0. \end{cases}$ 从而$f(x) = F'(x) = \begin{cases} C_1, & x<0, \\ C_2, & x>0. \end{cases}$ 又因为函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，所以$C_1 = f(0) = C_2$. 因此$f(x) \equiv f(0)$是常数函数.

得 分

七、(10分) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x\sin(\sin(2\pi nx))\mathrm{d}x = 0$.

证 由换元积分法得

$$\int_0^1 x\sin(\sin(2\pi nx))\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi^2n^2}\int_0^{2\pi n} t\sin(\sin t)\mathrm{d}t \quad (t = 2\pi nx).$$

由积分的区间可加性得$\int_0^{2\pi n} t\sin(\sin t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} t\sin(\sin t)\mathrm{d}t$. 由换元积分法得

$$\begin{aligned}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} t\sin(\sin t)\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi}(u+2(k-1)\pi)\sin(\sin u)\mathrm{d}u \quad (t = u+2(k-1)\pi) \\ &= \int_0^{2\pi} u\sin(\sin u)\mathrm{d}u + 2(k-1)\pi\int_0^{2\pi}\sin(\sin u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

记$I = \int_0^{2\pi}\sin(\sin u)\mathrm{d}u$, 令$u = 2\pi - v$换元，得$I = \int_{2\pi}^0 \sin(-\sin v)(-\mathrm{d}v) = -\int_0^{2\pi}\sin(\sin v)\mathrm{d}v = -I$, 故$I = 0$. 因此有

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} t\sin(\sin t)\mathrm{d}t = n\int_0^{2\pi} u\sin(\sin u)\mathrm{d}u.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x\sin(\sin(2\pi nx))\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\pi^2n^2}\cdot n\int_0^{2\pi} u\sin(\sin u)\mathrm{d}u = 0.$$

草 稿 区

得 分

八、(6分) 设$f(x)$是$[0,1]$上的上凸函数，$f(0)=1$. 证明：

$$\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{12}.$$

证　注意到$\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}$, 要证的不等式等价于$\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)[f(x)-1]\mathrm{d}x\geqslant 0$. 由$f(x)$是$[0,1]$上的上凸函数知$\frac{f(x)-f(0)}{x}$在$(0,1]$递减. 令$k=\frac{f\left(\frac{2}{3}\right)-f(0)}{\frac{2}{3}}$, 则当$x\in\left(0,\frac{2}{3}\right]$时，有$\frac{f(x)-f(0)}{x}\geqslant k$; 当$x\in\left[\frac{2}{3},1\right]$时，有$\frac{f(x)-f(0)}{x}\leqslant k$. 令$g(x)=kx+1$, 由上面的讨论和$f(0)=1$知当$x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$时，有$f(x)\geqslant g(x)$; 当$x\in\left[\frac{2}{3},1\right]$时，有$f(x)\leqslant g(x)$. 于是有

$$\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)[f(x)-1]\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)[g(x)-1]\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)kx\mathrm{d}x=\frac{k}{6}-\frac{k}{6}=0.$$

因此要证的不等式成立.

另证　由换元积分法得

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 t^2f(t^3)\mathrm{d}t\quad(x=t^3),\\ \frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 t^3f(t^2)\mathrm{d}t\quad(x=t^2).\end{aligned}$$

因为$f(x)$是$[0,1]$上的上凸函数，所以对任意$t\in[0,1]$, 有$tf(t^2)+(1-t)f(0)\leqslant f(t^3)$. 又$f(0)=1$, 于是对任意$t\in[0,1]$, 有

$$t^2f(t^3)-t^3f(t^2)\geqslant t^2(1-t)f(0)=t^2(1-t),$$

从而

$$\int_0^1[t^2f(t^3)-t^3f(t^2)]\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1 t^2(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{12}.$$

由积分的线性性质得

$$\int_0^1 t^2f(t^3)\mathrm{d}t-\int_0^1 t^3f(t^2)\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{12}.$$

结合上面换元积分法的结果即得

$$\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{12}.$$