数理科学与大数据本科生2021-2022学年第二学期

"数学分析II"期末考试试卷（A卷）

学号： 姓名：

注意事项

1. **解答必须写在答题卡上，写在本试卷上的解答无效**.

2. 试卷共4页，共7道大题. 考生不得自行拆开装订成册的试卷.

3. 试卷的空白区域为草稿区，考试中不得使用自备草稿纸.

一、(15分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可微，$u(x,y)=f(x^2+y^2)$. 证明：

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

二、(15分) 求积分$\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$.

三、(15分) 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 证明：$f(x,y)$在原点$(0,0)$处连续且两个偏导数都存在，但$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微.

四、(15分) 计算三重积分

$$\iiint_V z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中V: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\\ x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2,\end{cases}\quad a>0.$

五、(15分) 求函数$f(x,y,z)=xyz$在条件$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0)$下的极值.

六、(15分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$g(x)=f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减. 证明：$f(x)\equiv 0$.

七、(共10分，每问5分) 设$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$, $f(x,y)$是D上两次连续可微的有界正值函数，且对任意$(x,y)\in D$, 都有

$$\Delta\ln f(x,y)\geqslant f^2(x,y),$$

其中$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$是$\mathbb{R}^2$中的拉普拉斯算子. 令$g(x,y)=\dfrac{2}{1-x^2-y^2}$.

(1) 证明：对任意$(x,y)\in D$, 都有

$$\Delta\left[\ln g(x,y)-\ln f(x,y)\right]\leqslant g^2(x,y)-f^2(x,y).$$

(2) 证明：对任意$(x,y)\in D$, 都有$f(x,y)\leqslant g(x,y)$.