数理科学与大数据本科生2020 — 2021学年第二学期“数学分析II”期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

任课教师: **学号:** **姓名:** **成绩:**

一	二	三	四	五	六

得 分

一、(15分) 设$u(x,y)=x\ln(x+r)-r$, 其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 求证:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x+r}.$$

草 稿 区

得 分

二、(30分，每小题15分) 计算下列各题.

(1) 判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ 是否存在, 如果存在并求其值.

(2) 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\displaystyle\int_x^{\sqrt{x}} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

草 稿 区

得 分

三、(15分) 设$f(x) \in C^2([0,\pi])$, 且$f(0)=3$. 已知$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x \ \mathrm{d}x = 10$, 求$f(\pi)$.

草 稿 区

得 分

四、(15分) 求球体$x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$被圆柱面$x^2+y^2=ax$ $(a>0)$所割下部分立体的体积.

草 稿 区

得 分

五、(15分，第一问5分，第二问10分)

(1) 隐函数存在定理可以保证在哪些点的邻域内，由方程

$$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$$

可唯一地确定隐函数$z=z(x,y)$?

(2) 求隐函数$z=z(x,y)$的极值.

草 稿 区

得 分

六、(10分) 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为二阶连续可微函数，对任意$X\in\mathbb{R}^n$, $H_f(X)-I_n$都是半正定对称矩阵，其中$H_f(X)$是f在X的黑塞矩阵，I_n是n阶单位矩阵. 证明：$f(X)$在$\mathbb{R}^n$上有最小值.