数理科学与大数据本科生2021-2022学年第二学期“数学分析II”期末考试试卷（A卷）参考解答

一、(15分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可微，$u(x,y)=f(x^2+y^2)$. 证明：

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

证 记$r=x^2+y^2$, 由链式法则，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=2xf'(r),\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=2yf'(r).\end{aligned}$$

因此，

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=y\cdot 2xf'(r)-x\cdot 2yf'(r)=0.$$

□

二、(15分) 求积分$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^3}\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$.

解 由换元积分法，有

$$\begin{aligned}&\int_1^{\mathrm{e}^3}\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x\\ =&\int_1^{\mathrm{e}^3}\frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}(\ln x)\\ =&\int_0^3\frac{t}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t\quad(t=\ln x)\\ =&\int_1^2\frac{u^2-1}{u}\mathrm{d}(u^2-1)\quad(u=\sqrt{1+t})\\ =&\int_1^2(2u^2-2)\mathrm{d}u\\ =&\left(\frac{2}{3}u^3-2u\right)\Big|_1^2\\ =&\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)\\ =&\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

□

三、(15分) 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 证明：$f(x,y)$在原点$(0,0)$处连续且两个偏导数都存在，但$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微.

证 由极坐标变换，有

$$0 \leqslant \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^2\cos^2\theta \cdot r\sin\theta}{r^2}\right| \leqslant r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

由两边夹定理知$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$. 又$f(0,0)=0$, 故由二元函数在一点处连续的定义知$f(x,y)$在原点$(0,0)$处连续.

按偏导数的定义，由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

得$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

下面用反证法证明$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微. 反证. 若不然，则$f(x,y)$在$(0,0)$点可微. 由可微性的定义，结合$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, 即知当$\sqrt{x^2+y^2}\to 0$时，有

$$f(x,y)-f(0,0)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

也即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

但当$x>0, y>0, x=y$时，有$\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$, 与$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0$矛盾！故$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微. $\square$

四、(15分) 计算三重积分

$$\iiint_V z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中$V\colon \begin{cases} x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, \\ x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2, \end{cases} \quad a>0.$

解 在球坐标变换下，V表示为

$$V'=\left\{(r,\varphi,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\arccos\frac{r}{2a}\right\}.$$

于是有

$$
\begin{aligned}
& \iiint_V z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
= & \iiint_{V'} r^2\cos^2\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
= & \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r^4 \mathrm{d}r \int_0^{\arccos\frac{r}{2a}} \cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\
= & 2\pi\int_0^a r^4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\arccos\frac{r}{2a}} \mathrm{d}r \\
= & \frac{2}{3}\pi\int_0^a r^4\cdot\left(1-\frac{r^3}{8a^3}\right)\mathrm{d}r \\
= & \frac{2}{3}\pi\left(\frac{1}{5}r^5-\frac{1}{64a^3}r^8\right)\Big|_0^a \\
= & \frac{2}{3}\pi\left(\frac{1}{5}a^5-\frac{1}{64}a^5\right) \\
= & \frac{59}{480}\pi a^5.
\end{aligned}
$$

□

注 也可以将三重积分化为累次积分进行计算或者用柱坐标变换来计算.

五、(15分) 求函数$f(x,y,z)=xyz$在条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0)$下的极值.

解 拉格朗日函数为

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right).$$

由拉格朗日乘子法得方程组

$$
\begin{cases}
yz-\frac{\lambda}{x^2}=0,\\
xz-\frac{\lambda}{y^2}=0,\\
xy-\frac{\lambda}{z^2}=0,\\
\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}=0.
\end{cases}
$$

由前三个方程得

$$\lambda=x^2yz=xy^2z=xyz^2,$$

故$x=y=z$. 再结合最后一个方程解得$x=y=z=3a$. 因此，$(3a,3a,3a)$是唯一的条件临界点. 由均值不等式，在条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0)$下，有

$$\sqrt[3]{xyz}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=3a.$$

故

$$f(x,y,z)=xyz\geqslant 27a^3=f(3a,3a,3a).$$

由此可见$(3a,3a,3a)$是$f(x,y,z)$的最小值点，从而$(3a,3a,3a)$是$f(x,y,z)$的条件极小值点，条件极小值是$27a^3$. $\square$

六、(15分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$g(x)=f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减. 证明：$f(x)\equiv 0$.

证 记$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 由微积分基本定理知$F(x)$是$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的一个原函数. 令$G(x)=\dfrac{1}{2}F^2(x)$, 则

$$G'(x)=F(x)\cdot F'(x)=F(x)f(x)=g(x).$$

因为$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，所以$G(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的上凸函数. 因此，任意取定实数x_0, 对任意实数x, 有

$$G(x)\leqslant G'(x_0)(x-x_0)+G(x_0)=g(x_0)(x-x_0)+G(x_0).$$

若$g(x_0)>0$, 则由上式可得$\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)=-\infty$, 与$G(x)$在$(-\infty,+\infty)$上非负矛盾；若$g(x_0)<0$, 则由上式可得$\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=-\infty$, 也与$G(x)$在$(-\infty,+\infty)$上非负矛盾. 因此$g(x_0)=0$. 由$x_0$的任意性得$g(x)\equiv 0$. 于是$G(x)$恒为常数，结合$G(0)=0$得$G(x)\equiv 0$. 从而$F(x)\equiv 0$, 进而知$f(x)=F'(x)\equiv 0$. $\square$

七、(共10分，每问5分) 设$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$, $f(x,y)$是D上两次连续可微的有界正值函数，且对任意$(x,y)\in D$, 都有

$$\Delta\ln f(x,y)\geqslant f^2(x,y),$$

其中$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$是$\mathbb{R}^2$中的拉普拉斯算子. 令$g(x,y)=\dfrac{2}{1-x^2-y^2}$.

(1) 证明：对任意$(x,y)\in D$, 都有

$$\Delta\left[\ln g(x,y)-\ln f(x,y)\right]\leqslant g^2(x,y)-f^2(x,y).$$

(2) 证明：对任意$(x,y)\in D$, 都有$f(x,y)\leqslant g(x,y)$.

(1) **证** 记$r=x^2+y^2$, 则$\ln g(x,y)=\ln\dfrac{2}{1-r^2}$. 由链式法则，有

$$\frac{\partial}{\partial x}[\ln g(x,y)]=\frac{1-r^2}{2}\cdot\left(-\frac{2}{(1-r^2)^2}\right)\cdot(-2x)=\frac{2x}{1-r^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\ln g(x,y)]=\frac{1-r^2}{2}\cdot\left(-\frac{2}{(1-r^2)^2}\right)\cdot(-2y)=\frac{2y}{1-r^2},$$

进而得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\ln g(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{1-r^2}\right)=\frac{2}{1-r^2}+\frac{4x^2}{(1-r^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\ln g(x,y)]=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{1-r^2}\right)=\frac{2}{1-r^2}+\frac{4y^2}{(1-r^2)^2},$$

因此，

$$\Delta\left[\ln g(x,y)\right]=\frac{4}{1-r^2}+\frac{4r^2}{(1-r^2)^2}=\frac{4}{(1-r^2)^2}=g^2(x,y).$$

结合$\Delta\ln f(x,y)\geqslant f^2(x,y)$, 就有

$$\Delta\left[\ln g(x,y)-\ln f(x,y)\right]=\Delta\ln g(x,y)-\Delta\ln f(x,y)\leqslant g^2(x,y)-f^2(x,y).$$

(2) **证** 记$\varphi(x,y)=\ln g(x,y)-\ln f(x,y)$, $(x,y)\in D$, 由$f(x,y)$在D上有界得$\lim\limits_{\substack{(x,y)\in D\\ x^2+y^2\to 1}}\varphi(x,y)=+\infty$. 又因为$\varphi(x,y)$在$D$上连续，所以不难证明$\varphi(x,y)$在$D$内取得最小值. 设$\varphi(x,y)$在$D$内的一个最小值点是$(x_0,y_0)$，则$(x_0,y_0)$是$\varphi(x,y)$的一个极小值点. 由极值的必要条件知黑塞矩阵$H_\varphi(x_0,y_0)\geqslant 0$, 从而由$\Delta\varphi(x_0,y_0)$是矩阵$H_\varphi(x_0,y_0)$的迹可见$\Delta\varphi(x_0,y_0)\geqslant 0$. 再由(1)的结论知

$$0\leqslant\Delta\varphi(x_0,y_0)\leqslant g^2(x_0,y_0)-f^2(x_0,y_0).$$

故$g(x_0,y_0)\geqslant f(x_0,y_0)>0$. 于是，对任意$(x,y)\in D$, 有

$$\ln g(x,y)-\ln f(x,y)=\varphi(x,y)\geqslant\varphi(x_0,y_0)=\ln g(x_0,y_0)-\ln f(x_0,y_0)\geqslant 0.$$

因此，对任意$(x,y)\in D$, 都有$f(x,y)\leqslant g(x,y)$. □