数学科学学院伯苓班2018 — 2019学年第二学期“数学分析”期末考试试卷(A卷)

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

草 稿 区

得 分

一、(10分) 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^6}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 问函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上是否连续？证明你的结论.

得 分

二、(12分) 写出函数$f(x,y)=x^y$在点$(1,1)$处的二阶泰勒展开式.

草 稿 区

得 分

三、(10分) 已知$\int_{\ln 2}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}=\frac{\pi}{6}$, 求实数$x$的值.

得 分

四、(12分) 设$\vec{n}=(A,B,C)$(其中$C<0$)是曲面$z=x^2+y^2$在点$P(1,1,2)$处的一个法向量，求函数$f(x,y,z)=\sqrt{2x^2+2y^2+3z^2}$在点$P$处沿$\vec{n}$的方向导数$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P)$.

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设$z=z(x,y)$为由方程组$\begin{cases} x=\mathrm{e}^u\cos v, \\ y=\mathrm{e}^u\sin v, \\ z=uv \end{cases}$ 确定的隐函数, 求全微分$\mathrm{d}z$.

得 分

六、(12分) 设P是平面$3x-2z=0$上的动点，$A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, 求$|PA|^2+|PB|^2$取得最小值时点P的坐标.

草 稿 区

得 分

七、(12分) 在自变量和因变量的变换下, 将$z = z(x, y)$的方程变换为$w = w(u, v)$的方程，其中$u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy - z$, 方程为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

草稿区

得分

八、(9分) 设$f(x,y)$是$[a,b]\times[c,d]$上的二元函数，对任意$y_0\in[c,d]$, $f(x,y_0)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，对任意$x_0\in(a,b)$, $f'_x(x_0,y)$在$[c,d]$连续，在(c,d)可导. 证明：存在$(\xi,\eta)\in(a,b)\times(c,d)$, 使得

$$f(a,c)+f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)=(b-a)(d-c)f''_{xy}(\xi,\eta).$$

得分

九、(8分) 设$B=\left\{X\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,|X|<1\right\}$, $F\colon B\to B$是连续映射，对任意$X\in B\setminus\{O\}$, 有$|F(X)|<|X|$. 任意取定$X_1\in B$, 令$X_{k+1}=F(X_k)$, $k=1,2,\cdots$. 证明：$\lim\limits_{k\to\infty}X_k=O$.

草 稿 区

得 分

十、(5分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且对任何实数a, b, 都有$f(a)+f(b)\geqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$, 求证: $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上恒等于0.