数学科学学院伯苓班2018 — 2019学年第二学期“数学分析”期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、(10分) 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^6}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 问函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上是否连续？证明你的结论.

解　函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上不连续. 证明如下. 当(x,y)沿抛物线$x=y^2$趋于$(0,0)$时，有

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^6}=\frac{y^4}{y^4+y^6}=\frac{1}{1+y^2}\to 1.$$

故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)\neq 0=f(0,0)$. 因此，函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续，从而$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上不连续.

得 分

二、(12分) 写出函数$f(x,y)=x^y$在点$(1,1)$处的二阶泰勒展开式.

解　当$x>0$且$y>0$时，有$f'_x(x,y)=yx^{y-1}$, $f'_y(x,y)=x^y\ln x$, $f''_{xx}(x,y)=y(y-1)x^{y-2}$, $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$, $f''_{yy}(x,y)=x^y\ln^2 x$. 于是$f(1,1)=1$, $f'_x(1,1)=1$, $f'_y(1,1)=0$, $f''_{xx}(1,1)=0$, $f''_{xy}(1,1)=f''_{yx}(1,1)=1$, $f''_{yy}(1,1)=0$, 故函数$f(x,y)=x^y$在点$(1,1)$处的二阶泰勒展开式为

$$\begin{aligned}f(x,y)&=1+(x-1)+\frac{1}{2}\cdot 2(x-1)(y-1)+o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)\\&=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right).\end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

三、(10分) 已知$\displaystyle\int_{\ln 2}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}=\frac{\pi}{6}$, 求实数$x$的值.

解　令$u=\sqrt{\mathrm{e}^t-1}$, 则$t=\ln(u^2+1)$, 从而$\mathrm{d}t=\dfrac{2u\mathrm{d}u}{u^2+1}$. 因此，有

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}&=\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\frac{\frac{2u\mathrm{d}u}{u^2+1}}{u}=2\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\\&=2\arctan u\Big|_1^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}=2\left(\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

由$\displaystyle\int_{\ln 2}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}=\frac{\pi}{6}$得$2\left(\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, 故$\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=\dfrac{\pi}{3}$, 于是$\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=\sqrt{3}$, 解得$x=2\ln 2$.

得 分

四、(12分) 设$\vec{n}=(A,B,C)$(其中$C<0$)是曲面$z=x^2+y^2$在点$P(1,1,2)$处的一个法向量，求函数$f(x,y,z)=\sqrt{2x^2+2y^2+3z^2}$在点$P$处沿$\vec{n}$的方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial\vec{n}}(P)$.

解　记$g(x,y,z)=x^2+y^2-z$, 则$\nabla g(x,y,z)=(2x,2y,-1)$, 从而$\nabla g(1,1,2)=(2,2,-1)$. 因此，由$\vec{n}=(A,B,C)$(其中$C<0$)是曲面$z=x^2+y^2$在点$P(1,1,2)$处的一个法向量得$\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{2}=\dfrac{C}{-1}$, 于是沿$\vec{n}$的单位方向向量为$\vec{l}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$. 由$f(x,y,z)=\sqrt{2x^2+2y^2+3z^2}$得

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2y^2+3z^2}},\frac{2y}{\sqrt{2x^2+2y^2+3z^2}},\frac{3z}{\sqrt{2x^2+2y^2+3z^2}}\right),$$

其中$(x,y,z)\neq(0,0,0)$. 故$\nabla f(1,1,2)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$, 从而

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}(P)=\left\langle\nabla f(P),\vec{l}\right\rangle=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}.$$

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设$z=z(x,y)$为由方程组$\begin{cases} x=\mathrm{e}^u\cos v, \\ y=\mathrm{e}^u\sin v, \\ z=uv \end{cases}$确定的隐函数, 求全微分$\mathrm{d}z$.

解　对x, y, z求微分，得

$$\begin{cases} \mathrm{d}x=\mathrm{e}^u\cos v\mathrm{d}u-\mathrm{e}^u\sin v\mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}y=\mathrm{e}^u\sin v\mathrm{d}u+\mathrm{e}^u\cos v\mathrm{d}v, \\ z=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v. \end{cases}$$

由前两个等式解得$\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-u}(\cos v\mathrm{d}x+\sin v\mathrm{d}y)$, $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-u}(-\sin v\mathrm{d}x+\cos v\mathrm{d}y)$, 于是

$$\mathrm{d}z=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-u}\left[(v\cos v-u\sin v)\mathrm{d}x+(v\sin v+u\cos v)\mathrm{d}y\right].$$

得 分

六、(12分) 设P是平面$3x-2z=0$上的动点，$A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, 求$|PA|^2+|PB|^2$取得最小值时点P的坐标.

解　设$P(x,y,z)$, 令$f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=2x^2+2y^2+2z^2-6x-8y-10z+32$, $g(x,y,z)=3x-2z$, 则当$|PA|^2+|PB|^2$取得最小值时，点P是$f(x,y,z)$在条件$g(x,y,z)=0$下的条件极小值点. 令$L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$, 由拉格朗日乘子法得方程组:

$$\begin{cases} 4x-6+3\lambda=0, \\ 4y-8=0, \\ 4z-10-2\lambda=0, \\ 3x-2z=0. \end{cases}$$

由第2个方程得$y=2$, 由第3个和第4个方程消去z, 得$3x-5-\lambda=0$, 再与第1个方程联立，解得$x=\dfrac{21}{13}$, 从而$z=\dfrac{63}{26}$. 因此，$f(x,y,z)$在条件$g(x,y,z)=0$下有唯一的条件极值点$\left(\dfrac{21}{13},2,\dfrac{63}{26}\right)$. 故当$|PA|^2+|PB|^2$取得最小值时，点$P$的坐标为$\left(\dfrac{21}{13},2,\dfrac{63}{26}\right)$.

草 稿 区

得 分

七、(12分) 在自变量和因变量的变换下, 将$z=z(x,y)$的方程变换为$w=w(u,v)$的方程，其中$u=x+y,\ v=x-y,\ w=xy-z$, 方程为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解　由$w=xy-z$得$z=xy-w$, 于是有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

进而得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= 1-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=1-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

因此，方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$变换为

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+2-2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0,$$

整理化简得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}.$$

草 稿 区

得 分

八、(9分) 设$f(x,y)$是$[a,b]\times[c,d]$上的二元函数，对任意$y_0\in[c,d]$, $f(x,y_0)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，对任意$x_0\in(a,b)$, $f'_x(x_0,y)$在$[c,d]$连续，在(c,d)可导. 证明：存在$(\xi,\eta)\in(a,b)\times(c,d)$, 使得

$$f(a,c)+f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)=(b-a)(d-c)f''_{xy}(\xi,\eta).$$

证　令$g(x)=f(x,d)-f(x,c)$, 则$g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导. 由拉格朗日中值定理知存在$\xi\in(a,b)$, 使得$g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)$. 因为$f'_x(\xi,y)$在$[c,d]$连续，在(c,d)可导，所以由拉格朗日中值定理知存在$\eta\in(c,d)$, 使得$f'_x(\xi,d)-f'_x(\xi,c)=f''_{xy}(\xi,\eta)(d-c)$. 因此，

$$\begin{aligned}&f(a,c)+f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)=g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)\\=\ &[f'_x(\xi,d)-f'_x(\xi,c)](b-a)=(b-a)(d-c)f''_{xy}(\xi,\eta).\end{aligned}$$

得 分

九、(8分) 设$B=\left\{X\in\mathbb{R}^n\middle||X|<1\right\}$, $F\colon B\to B$是连续映射，对任意$X\in B\setminus\{O\}$, 有$|F(X)|<|X|$. 任意取定$X_1\in B$, 令$X_{k+1}=F(X_k)$, $k=1,2,\cdots$. 证明：$\lim\limits_{k\to\infty}X_k=O$.

证　因为对任意$X\in B\setminus\{O\}$, 有$|F(X)|<|X|$, 所以由两边夹定理知$\lim\limits_{X\to O}|F(X)|=0$. 又$F\colon B\to B$是连续映射，故$F(O)=\lim\limits_{X\to O}F(X)=O$. 若某个$X_k=O$, 则后面的项全为$O$, 从而$\lim\limits_{k\to\infty}X_k=O$. 下面设$X_k\neq O$, $k=1,2,\cdots$. 因为$|X_{k+1}|=|F(X_k)|<|X_k|$, $k=1,2,\cdots$, 所以$\{|X_k|\}$严格递减. 又$\{|X_k|\}$有下界0, 故由单调收敛定理知$\lim\limits_{k\to\infty}|X_k|$存在, 记$r=\lim\limits_{k\to\infty}|X_k|$. 由波尔查诺-魏尔斯特拉斯引理知$\{X_k\}$有收敛的子序列$\{X_{k_l}\}$, 记$P=\lim\limits_{l\to\infty}X_{k_l}\in B$, 则有

$$|P|=\left|\lim_{l\to\infty}X_{k_l}\right|=\lim_{l\to\infty}|X_{k_l}|=r=\lim_{l\to\infty}|X_{k_l+1}|=\lim_{l\to\infty}|F(X_{k_l})|=\left|\lim_{l\to\infty}F(X_{k_l})\right|=|F(P)|.$$

因此，$P=O$, 从而$r=0$, 故$\lim\limits_{k\to\infty}X_k=O$.

草 稿 区

得 分

十、(5分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且对任何实数a, b, 都有$f(a)+f(b)\geqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$, 求证: $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上恒等于0.

证　取$b=a$可见$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上非负. 下面先证明对任何实数$a<b$, 都有$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant f(a)$. 反证. 若不然，则存在实数$\alpha$和$\beta$, $\alpha<\beta$, 使得$\int_\alpha^\beta f^2(t)\mathrm{d}t>f(\alpha)$. 令$F(x)=\int_\alpha^x f^2(t)\mathrm{d}t-f(\alpha)$, 则$F(\beta)>0$. 由$F(x)$在$[\alpha,+\infty)$单增知对任何$x\geqslant\beta$, 都有$F(x)>0$. 由题设知对任何$x\geqslant\beta$, 都有$f(x)\geqslant F(x)>0$, 于是对任何$x\geqslant\beta$, 都有$F'(x)=f^2(x)\geqslant F^2(x)$. 因此对任何$x>\beta$, 有

$$\int_\beta^x \frac{F'(t)}{F^2(t)}\mathrm{d}t\geqslant\int_\beta^x \mathrm{d}t,$$

从而得到

$$\frac{1}{F(\beta)}-\frac{1}{F(x)}\geqslant x-\beta,$$

整理得

$$F(x)\geqslant\frac{1}{\beta+\frac{1}{F(\beta)}-x}.$$

记$x_1=\beta+\frac{1}{F(\beta)}$, 令$x\to x_1^-$取极限，由上面的不等式得$\lim\limits_{x\to x_1^-}F(x)=+\infty$, 与$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续矛盾！

这就证明了对任何实数$a<b$, 都有$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant f(a)$.

再用反证法证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上恒等于0. 若不然，则存在实数ξ, 使得$f(\xi)>0$. 由f的连续性知存在$\delta>0$, 使得f在$(\xi-\delta,\xi+\delta)$中恒大于0. 记$c=\xi+\delta$, 令$G(x)=\int_x^c f^2(t)\mathrm{d}t$, 则$G(\xi)>0$. 由$G(x)$在$(-\infty,c]$单减知对任何$x\leqslant\xi$, 都有$G(x)>0$. 因为$G(x)\leqslant f(x)$, $\forall x<c$, 所以对任何$x\leqslant\xi$, 都有$G'(x)=-f^2(x)\leqslant -G^2(x)$. 因此对任何$x<\xi$, 有

$$\int_x^\xi \frac{G'(t)}{G^2(t)}\mathrm{d}t\leqslant-\int_x^\xi \mathrm{d}t,$$

从而得到

$$\frac{1}{G(x)}-\frac{1}{G(\xi)}\leqslant x-\xi,$$

整理得

$$G(x)\geqslant\frac{1}{x-\xi+\frac{1}{G(\xi)}}.$$

记$x_2=\xi-\frac{1}{F(\xi)}$, 令$x\to x_2^+$取极限，由上面的不等式得$\lim\limits_{x\to x_2^+}G(x)=+\infty$, 与$G(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续矛盾！