2024-2025 研究生抽象代数期末考试

Bob

2024 年 12 月 30 日

本试卷出现的 $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ 分别为实数域、复数域、四元数体.

一、$\mathcal{A}$ 是所有形如 $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ a_4 & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}$ 的矩阵构成的代数, 问 $\mathcal{A}$ 是不是半单结合代数并证明之.

二、设半单结合代数 $\mathcal{A}$ 的模 V_1, V_2 对应 $\mathcal{A}$ 的表示为 ρ_1, ρ_2. 证明 V_1 与 V_2 同构当且仅当

$$\mathrm{tr}\rho_1(a)=\mathrm{tr}\rho_2(a),\quad \forall a\in\mathcal{A}$$

三、设 $Q_8=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$ 为四元数群, 它所有的共轭类分别为 $C_1=\{1\},C_2=\{-1\},C_3=\{\pm i\},C_4=\{\pm j\},C_5=\{\pm k\}$.

1) 求 Q_8 的特征标表.

2) 将 $\mathbb{H}$ 视为 4 维线性空间, ρ 为 Q_8 自然作用在 $\mathbb{H}$ 上得到的表示. 问 ρ 视为一个复表示时是否可约? 若不可约, 将 ρ 分解为不可约表示的直和.

四、$\mathcal{A}=\{v_1,v_2,v_3\,|\,v_1^2=v_2^2=v_3^2=1,\,v_iv_j=-v_jv_i,\,i\neq j\}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的 Clifford 代数.

$$\begin{aligned} e_1&=\frac{1}{4}(1+v_1)(1+iv_2v_3) \qquad & e_2&=\frac{1}{4}(1+v_1)(1-iv_2v_3)\\ e_3&=\frac{1}{4}(1-v_1)(1+iv_2v_3) \qquad & e_4&=\frac{1}{4}(1-v_1)(1-iv_2v_3) \end{aligned}$$

1) 证明: $e_1v_1=e_1,\ e_1v_2v_3=-ie_1,\ e_1v_2=v_2e_4,\ e_1v_3=v_3e_4$.

2) 证明: e_1, e_2, e_3, e_4 是幂等元.

3) 求 $\mathcal{A}$ 的一组本原幂等元.

4) 求 $\mathcal{A}$ 的一组正交中心幂等元.

5) 将 $\mathcal{A}$ 写成矩阵代数的直和.

五、设 G 是有限群, $\mathbb{F}[G]$ 是域 $\mathbb{F}$ 上由 G 生成的群代数, V 是由 $v=\sum\limits_{g\in G} g$ 生成的子空间.

1) 证明: V 是 $\mathbb{F}[G]$ 的 G-不变子空间.

2) 证明: 若 $\mathrm{ch}\mathbb{F} \,\big|\, |G|$, 则不存在 $\mathbb{F}$ 的不变子空间 W 使得 $\mathbb{F}[G]=V\oplus W$.

六、证明 $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}$ 作为结合代数同构于 $M^{2\times 2}(\mathbb{C})$.

七、设 $\mathcal{A}$ 是含幺元 e 的结合代数, $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{A}$ 的幂零根基. 证明: $a\in\mathcal{N}$ 当且仅当对任意的 $b\in\mathcal{A}$, $e-ab$ 可逆.