

2024 秋季学期省身班复变函数期末考试

1. 利用留数定理计算 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.
2. $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 解析, 求证 $\sum_{k=0}^{\infty} f(z^k)$ 在 $|z| < 1$ 解析.
3. 若开域 D 中的解析函数列 $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$ 紧一致收敛于非恒零的解析函数 $f(z)$, 则 $f(z)$ 的每一零点皆是 $f_n(z)$ 的零点的极限点.
4. 设 Γ 是简单闭路径, D 是其内部, f 在 D 中解析, 在 \bar{D} 上连续.
 - (1) 若 $|f(z)|$ 在 Γ 上是常数 M , 求证或者 f 是常数, 或者 f 在 D 中有零点;
 - (2) 若 f 在 Γ 上取实值, 求证 f 是常数.
5. 设 $f(w)$ 在 $|w| < R$ 解析, 任取 z 满足 $|z| < R$, 计算 $\int_{|w|=R} \frac{w+z}{(w-z)z} dw$, 进而计算 $\int_{t=0}^{2\pi} \frac{R^2-|z|^2}{|Re^{it}-z|^2} dt$
6. 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 中解析, $|f(z)| \leq \frac{c}{1-|z|}$, 求证 $|f''(z)| \leq \frac{27c}{2(1-|z|)^3}$