

绝密 ★ 启用前

南开大学数学科学学院

数理方程2024-2025期末测试卷

注意事项:

1. 命题人: 魏雅薇
2. 回忆人: xzqbear
3. 考试限时: 100 分钟
4. 本学期小测和上个学年一致.
5. 考试时间: 2024 年 1 月 2 日

一、解答题

1. (15 分)

对受摩擦力作用且具有固定端点的有界弦振动, 满足方程:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu_t = 0, c > 0$$

证明能量减少, 并证明:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu_t = f$$

初边值问题解的唯一性.

2. (15 分)

求解一维波动方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u|_{t=0} = g_0(x), x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g_1(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. (15 分)

利用 Fourier 方法求解如下的 $n = 1$ 热传导方程初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, t) = 0, u_x(0, t) = 1 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x/l) \end{cases}$$

4. (15 分)

证明调和函数的极值原理, 即: 若连通开集 Ω 中的调和函数 u 不恒等于一个常数, 则 u 必不能在 Ω 内达到上下确界.

5. (15 分)

证明: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

6. (15 分)

设 $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, g 是一个 m 次多项式, 证明 $f * g$ 也是一个至多 m 次多项式.

7. (10 分)

说明截断函数的定义, 并构造截断函数.