

2024-2025学年第一学期高等代数与解析几何第2次月考

回忆人: jpp

一、(本题15分)设 a 为常数, 讨论下列非齐次线性方程组解的情况, 若有通解须求出

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 2 \\ \vdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = n \end{cases}$$

二、(本题15分)设 A, B 为 n 阶矩阵, 满足 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) < n$, 求证: n 元齐次线性方程组 $AX = \vec{0}$ 与 $BX = \vec{0}$ 有公共的非零解

三、(本题15分)已知线性无关的向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 可以由向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 线性表出, 求证: 存在 $\alpha_k (1 \leq k \leq n)$, 使得 $\alpha_k, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关

四、(本题15分)设 A 为 n 阶矩阵, 求证:
 A 不可逆的充要条件是存在一个不为零的同阶矩阵 B 使得 $AB = 0$

五、(本题15分)设 A 为 \mathbb{R} 上的 n 阶矩阵, $A = (a_{ij})$, 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| (i = 1, 2, \cdots, n)$
求证: A 为可逆阵

六、(本题10分)设 A, B 为 n 阶矩阵, 求证:

$$\text{rank}(AB - E_n) \leq \text{rank}(A - E_n) + \text{rank}(B - E_n)$$

七、(本题15分)设 A, B, C, D 为 n 阶矩阵, 满足 $AC = CA$, 求证:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$