

数理统计-2024-2025学年度期中测试

注意事项:

1. 回忆人: xzqbear
2. 考试时间: 100 分钟
3. 试题相关答案在微信公众平台有解答.

一、填空题 (共 4 道题, 每空 3 分)

1. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 则样本方差 S_n^2 所服从的分布为 _____ . 方差为 _____ .
2. 自由度 $(1, n)$ 的 F 分布的分位数 $F_\alpha(1, n)$ 与 t 分位数间的关系为: $F_\alpha(1, n) =$ _____ .
3. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 CDF 为 F 的 IID 样本, 则最大次序统计量的抽样分布为 _____ . 样本经验分布 $F_n(x) =$ _____ . 其中中心极限定理的形式为 _____ .
4. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的 IID 样本, 其中 μ_0 已知, 则充分统计量为 _____ .

二、解答题

5. (15 分)

已知 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} E(\lambda)$, 设 $X_{(0)} = 0$, $Z_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, i = 1, 2, \dots, n$.

(1) 证明: Z_1, Z_2, \dots, Z_n 相互独立.

(2) 求 $2\lambda(n-i+1)Z_i$ 的分布.

(3) 证明: $S^2 = 2\lambda \sum_{i=1}^n [X_{(i)} - X_{(1)}] \sim \chi^2(2(n-1))$.

6. (8 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} F(x)$, 次序统计量记为 $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$, 求 $\mathbb{E}[F(X_{(i)})]$ 以及 $\text{Var}[F(X_{(i)})]$

7. (13 分)

设 $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} E(\lambda)$ 且 $Z_1, \dots, Z_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} E(\mu)$:

(1) 试求 μ 的矩估计和 MLE.

(2) 若仅观测到 $X_i = \min\{Y_i, Z_i\}$ 和 $\Delta_i = \mathbb{1}_{\{X_i=Y_i\}}$, 试求 λ, μ 的 MLE.

8. (8 分)

已知 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$, 设 $U = \sum_{i=1}^n X_i^2$, 且 $V_i = \frac{X_i^2}{U}$, 求证: U 和 (V_1, \dots, V_n) 相互

独立.

9. (10 分)

设 $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$:

(1) 证明: $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 为 σ^2 的有效估计.

(2) 求 σ 的 UMVUE.

10. (17 分)

设 $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} (\mu, \sigma^2)$, 且 $\mathbb{E}X^4 < \infty$, 证明:

(1) 样本均值是 μ 的相合渐近正态估计.

(2) 样本方差 S_n^2 是 σ^2 的无偏估计, 相合估计和相合渐近正态估计.

注: 本题未打错, 不是 $N(\mu, \sigma^2)$ 而是 (μ, σ^2)

11. (8 分)

设某产品的寿命 X 服从指数分布 $E(\lambda)$, 抽取 n 个产品并得到样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 试求其平均寿命 $\frac{1}{\lambda}$ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间.