2014-2015学年抽象代数2-1期中考试试题

一、判断下列命题是否正确，正确的给出简单证明，错误的举出反例。

1.在集合G中定义代数运算“$\circ$”;且G对“$\circ$”存在幺元，G中任何元存在逆元，则$\{G;\circ\}$为群。

2.设G,H,K为群，φ,ψ分别为G到H,G到K的满同态，且$\ker\varphi\simeq\ker\psi$，则$H\simeq K$.

3.设f为幺环R_1到幺环R_2的满映射，若a为R_1的逆元，则$f(a)$为R_2的逆元.

4.有限整环必为域

二、设G为群，$H_i \lhd G, \forall i=1,2,\cdots,m$。证明：$H_1H_2\cdots H_m < G$,且若$|H_1|,|H_2|,\cdots,|H_m|$互素,则$|H_1H_2\cdots H_m| = |H_1||H_2|\cdots|H_m|$.

三、设X为一个集合，$P(X)$为X的幂集,在$P(X)$中定义运算

$A+B=A\cup B-A\cap B$

$AB=A\cap B$

证明:$P(X)$对于这两种运算构成幺环，并求出所有的零因子.

四、设p,q为素数，$p<q$,证明：若pq阶群有q阶子群,则G只有一个q阶子群.

五、定义$Z[\sqrt{m}]=a+b\sqrt{m}|a,b\in\mathbb{Z}$,证明:$Z[\sqrt{m}]$为整环，且$Z[\sqrt{2}]$与$Z[\sqrt{3}]$不同构

六、设$H<G$,且$[G:H]<\infty$，证明：存在G的正规子群K，且$[G:K]<\infty$.