数学科学学院2015级高等代数2-2期末考试参考答案

ZENGYC编写

一、已知曲面$2xy+2xz+2yz=1$.用第一类正交变换将该曲面化为标准型，并指出曲面类型.

解：由题意可得方程对应二次型有 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}$=$(\lambda+1)^2(\lambda-2)$,可解得特征值为$-1$，2.

①$\lambda=-1$时，得到特征向量有 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

②$\lambda=2$时，得到的特征向量为$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\because$实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交，

$\therefore$正交化：记 $\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, 则$\eta_2=\xi_2-\frac{(\eta_1,\xi_2)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$, $\eta_3=\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

单位化：$\gamma_1=\frac{\eta_1}{|\eta_1|}$=$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\gamma_2=\frac{\eta_2}{|\eta_2|}$=$\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$, $\gamma_3=\frac{\eta_3}{|\eta_3|}$=$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}$.

将其排列为3×3矩阵记为 $T=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt3}{3}\\0&\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}$ 求$|T|$得$|T|$=1,为第一类正交变换。

于是标准型=$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,即曲面化为$-\omega_1^2-\omega_2^2+2\omega_3^2=1$,曲面类型为双叶双曲面。

二、 已知A是$n\times n$的实对称矩阵.证明:对任意的列向量α都有一个正常数c使得$|\alpha'A\alpha|\leqslant c\alpha'\alpha$.

解：（注意：最后不等式中| |不是指求行列式，因为它本身就是一个数，所以在这里是绝对值的意思。）

$\because$ A是实对称矩阵

$\therefore$ 必存在一个正交矩阵T使得$T^{-1}AT$能化为标准型，记该标准型为B。

不等式左边=$|\alpha'TBT^{-1}\alpha|=\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i^2$.取$c=max\{|b_i|\}(i=1,2,...,n)$,显然有不等式恒成立。此$c$即为所求。

三、求矩阵$\begin{pmatrix}4&6&-15\\1&3&-5\\1&2&-4\end{pmatrix}$的若尔当标准型.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&15\\-1&\lambda-3&5\\-1&-2&\lambda+4\end{vmatrix}$ 易得$D_1(\lambda)=1,D_2(\lambda)=\lambda-1,D_3(\lambda)=(\lambda-1)^3$. 则有$d_1(\lambda)=D_1=1,d_2(\lambda)=\frac{D_2}{D_1}=\lambda-1,d_3(\lambda)=\frac{D_3}{D_2}=(\lambda-1)^2$.

可求得初等因子为$(\lambda-1)^2,\lambda-1$,因此有该矩阵的若当标准型为： $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

四、设A是n阶非零实对称矩阵，记$\mathbb{R}^n$的两个子空间为$U=\{X\in\mathbb{R}^n|AX=0\},V=\{AX|X\in\mathbb{R}^n\}$证明:$U$是$V$在$\mathbb{R}^n$的正交补空间.

证：取$\mathbb{R}^n$中的一组标准正交基，取$\forall\alpha\in U,\forall A\beta\in V$(令$\alpha$和$A\beta$都表示该向量在标准正交基下的坐标)，则有$\alpha'A\beta=(A\alpha)'\beta=0$,由此可知$\alpha\perp A\beta$,所以$U$是$V$在$\mathbb{R}^n$的正交补空间,证毕。

五、设A为一个n阶复方阵，A的特征多项式$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_n)^{r_n}$,其中$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$互不相同.证明:$A$的若尔当标准型中$\lambda_i$为对角元的若尔当块的个数等于$V_i$的维数.

证：由于A为复方阵，所以必存在可逆矩阵T使得$T^{-1}AT = J$(J为若当标准型，其中，

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_n \end{pmatrix}$$

而V_i的维数与属于λ_i的特征向量的秩相同，所以要证明题目结论，即证A的若当标准型中J_i中若当块的个数等于属于λ_i的特征向量的秩。

设J_i若当块个数为m,属于λ_i的特征向量的秩为n,而对$\forall(\lambda E - J_i)$,设其秩为R_i.显然R_i=r_i-m.考虑齐次方程组$J_iX = 0$,则解得X的基础解系为属于λ_i的特征向量的极大无关组，基础解系的秩为$r_i - R_i = m$,而特征向量秩为n，所以m=n,得证。

六、已知$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$为欧氏空间的两组向量.证明:若$(\alpha_i,\alpha_j) = (\beta_i,\beta_j)(i,j = 1,2,...,m)$则子空间$V_1$=$L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$与$V_2 = L(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m)$同构.

证：定义一个线性变换$\delta(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i\alpha_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i\beta_i$。下面证$\delta$为同构映射。

由$\delta(0) = 0$知δ为单射。而对任意$\sum\limits_{i=1}^{n} k_i\beta_i$有原像为$\sum\limits_{i=1}^{n} k_i\alpha_i$,所以$\delta$为满射。又有$(\delta(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\alpha_i),\delta(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\alpha_i)) = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\beta_i,\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\beta_i) = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\alpha_i,\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\alpha_i)$,所以$\delta$保内积.综上所述$\delta$为同构映射，得证。

七、设A,B是$n\times n$实对称矩阵，A正定.证明:AB相似于对角矩阵.又若B也正定，则AB的特征值为正实数.

证：（1）因为A为正定的实对称矩阵，所以必定存在一个正交矩阵T_1使得$T_1^{-1}AT_1 = E$，记$B_1 = T_1^{-1}BT_1$。

由B是实对称矩阵，则B一定相似于对角阵，所以B_1也相似于对角阵,并记该对角阵为B_2。于是存在一个T_2有$T_2^{-1}B_1T_2 = B_2$,而$T_2^{-1}T_2^{-1}B_1T_2 = B_2T_2 = E$,因此$(T_1T_2)^{-1}AB(T_1T_2) = (T_1T_2)^{-1}A(T_1T_2)(T_1T_2)^{-1}B(T_1T_2) = B_2$,可知AB与对角矩阵相似。

（2）而B正定，则B_2的对角元都为正实数，所以B_2的特征值都为实数。而AB相似于B_2，所以特征值相同，所以AB的特征值也都为正实数，得证。