数学科学学院2015级高等代数2-2期末考试

命题人:耿薇 (回忆人:张万鹏)

一、已知曲面$2xy+2xz+2yz=1$.用第一类正交变换将该曲面化为标准型，并指出曲面类型.

二、已知A是$n\times n$的实对称矩阵.
证明:对任意的列向量α都有一个正常数c使得$|\alpha^{'}A\alpha|\leqslant c\alpha'\alpha$.

三、求矩阵$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$的若尔当标准型.

四、设A是n阶非零实对称矩阵，记$\mathbb{R}^n$的两个子空间为$U=\{X\in\mathbb{R}^n\big|AX=0\},V=\{AX\big|X\in\mathbb{R}^n\}$.
证明:U是V在$\mathbb{R}^n$的正交补空间.

五、设A为一个n阶复方阵，A的特征多项式$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$,其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$互不相同.
证明:A的若尔当标准型中以λ_i为对角元的若尔当块的个数等于V_{λ_i}的维数.

六、已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$为欧氏空间的两组向量.
证明:若$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)(i,j=1,2,\ldots,m)$,则子空间$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$与$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$同构.

七、设A,B是$n\times n$实对称矩阵，A正定.
证明:AB相似于对角矩阵.又若B也正定，则AB的特征值为正实数.