

数学科学学院2015级抽象代数期中考试(数学类)

命题人:王秀玲 (回忆人:张万鹏)

一、判断题

- () 1. 在 \mathbb{R} 中, 关系 $x \sim y \iff |x - y| \leq 2$ 是等价关系.
- () 2. \mathbb{R} 关于运算 $a * b = a + b - ab$ 构成么半群.
- () 3. 半群 G 是群当且仅当满足左右消去率.
- () 4. 若有限群 G 的任何真子群都是循环群, 则 G 是循环群.
- () 5. 若 G 按代表元分类可表示为 $a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_nH = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_n$, 则 $H \triangleleft G$.

二、填空题

1. 设 a 为2阶元, b 为3阶元, $ab = ba$, 则 ab 是____阶元.
2. 6阶循环群有____个子群. 写出 Z_6 的所有子群_____.
3. 设 $\sigma = (134)(57)$, $\tau = (327)(26)(14)$, 则 $\sigma\tau\sigma^{-1} =$ _____, τ 可写为不相交的轮换之积_____, τ 的阶数是_____.
4. 写出 Z_{12} 的所有生成元_____.
5. 设 $f: \{\mathbb{R}; +\} \rightarrow \{\mathbb{C}^*; \cdot\}$, $f(x) = \cos x + \sqrt{-1} \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$, 则 $\ker f =$ _____.
6. 凯莱(Cayley)定理中, 任何一个群都与一个_____同构.
7. 叙述群同态基本定理_____.

三、群 G ($|G| > 2$)中的任意元素 x 满足 $x^2 = e$, 证明 G 必有4阶子群.

四、设 H, K 是乘法群 G 的两个子群, 定义 $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$, 证明

- (1) HK 是 G 的子群当且仅当 $HK = KH$.
- (2) 若 H, K 均是 G 的正规子群, 则 $HK \triangleleft G$.
- (3) $|HK| = |H||K|/|H \cap K|$.

五、设 $N \triangleleft G$, 若 $N < H \triangleleft G \implies N = H$, 则称 N 是 G 的极大正规子群. 证明: 若 N 是 G 的极大正规子群, 则 G/N 必为单群.