2015级抽象代数期末考试(数学类)

命题人:王秀玲(回忆:张万鹏)

一、若环R的任意非零元a都满足$a^2=a$，证明：R是交换环.

二、写出$\mathbb{Z}_6$的所有理想.

三、写出$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$的所有单位.

四、写出$\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$在$\mathbb{Q}$下的基.

五、设$R=\left\{\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & c \end{array}\right)\in F^{2\times 2}\middle| a,b,c\in F\right\}$，$I=\left\{\left(\begin{array}{cc} 0 & b \\ 0 & c \end{array}\right)\in F^{2\times 2}\middle| b,c\in F\right\}$，其中$F$是数域.
证明：R是$F^{2\times 2}$的子环，I是R的极大理想.

六、设$f(x)=x^3+2x+3, g(x)=x^3+x$.
(1)在$\mathbb{Q}$上分解$f(x),g(x)$并写出最大公因式.
(2)在$\mathbb{Z}_5$上分解$f(x),g(x)$并写出最大公因式.

七、设α是方程$x^3-3x+4=0$的根，写出$1+\alpha$在$\mathbb{Q}(\alpha)$上形如$a\alpha^2+b\alpha+c$的逆元.

八、设$R=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in\mathbb{Z},(n,p)=1\right\}$.
(1)证明R是整环，并求R的分式域.
(2)证明R是主理想整环.

九、设K为F的扩域，$u\in K$是F上的代数元，且$\deg(u,F)$为奇数，证明：$F(u^2)=F(u)$.