2016~2017 学年第二学期高等代数与解析几何 2-2 期中测试

命题人 耿薇

1、设 A=$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵。

2、设 $\begin{cases} \alpha_1 = (1,2,-1,-2) \\ \alpha_2 = (3,1,1,1) \\ \alpha_3 = (-1,0,1,-1) \end{cases}$，$\begin{cases} \beta_1 = (2,5,-6,-5) \\ \beta_2 = (-1,2,-7,3) \end{cases}$。

求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的子空间与 β_1,β_2 生成的子空间的交的维数和一组基。

3、矩阵 A=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的不变因子、初等因子和 Jordan 标准形。

4、在线性空间 $p^{2\times2}$ 中定义变换 $\sigma(X)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\forall X \in p^{2\times2}$。

（1）证明 σ 是线性变换；

（2）写出 $p^{2\times2}$ 的一组基，并求出 σ 在这组基下的矩阵。

5、设 V 是复数域上的 n 维线性空间，而线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是一若尔当块，证明：

（1）V 中包含 ε_1 的 σ-子空间只有 V 本身；　　（2）V 中任一非零 σ-子空间都包含 ε_n。

6、设 σ 是 n 维线性空间 V 中的线性变换，λ_i 是其 s 个互不相同的特征值，i=1,2⋯s。最小多项式 $m(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)$，令 $f_i(x)=\dfrac{m(x)}{(x-\lambda_i)}$， $f_i(x)=\dfrac{m(x)}{(x-\lambda_i)}, W_i = f_i(\sigma)(V)$。

证明：$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$。

7、证明：复数域上所有 n 阶 n-1 次幂零矩阵都相似。