高等代数与解析几何 2-1 期中考试题

2019 年 11 月 15 日

一. 计算 (每小题 10 分, 共 20 分).

1. 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式:
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

2. 用 Cramer 法则解下面方程:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

二. 计算下列行列式 (每小题 10 分, 共 20 分).

1.

$$\begin{vmatrix} t + a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & t + a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & t + a_nb_n \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \\ x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 \\ x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 & x_5^6 \end{vmatrix}$$

三. (10 分) 判断多项式 $x^4 + 4kx + 1$ (k 为整数) 在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约.

四. (10 分) 证明: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为实数) 的三个根的实部都是负数的充分必要条件是 $a > 0$, $ab > c$, $c > 0$.

五. (10 分) 设 n 为正整数, $f_i(x)$ $(1 \le i \le n-1)$ 是数域 P 上多项式. 试证: 若 $\sum_{i=0}^{n-1} x^i \Big| \sum_{i=1}^{n-1} x^i f_i(x^n)$, 则

$$x - 1 \Big| (f_1(x), ..., f_{n-1}(x)).$$

六. (10 分) 试证 $x^n + ax^{n-m} + b$ $(n \ge m)$ 的任何一个非 0 根 (如果存在) 的重数小于等于 2.

七. (7 分) 设复方阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. 试证 $\det A$ 是实数.

八. (13 分) 称一个 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为严格对角占优, 如果对于任意 $1 \le i \le n$, 成立 $a_{ii} > \sum_{j \ne i} |a_{ij}|$. 试证: 严格对角占优方阵的行列式为正.

答案

一. 1. $(f(x), g(x)) = 1$. 计算如下:

$$f(x) = g(x)(x-1) + (-3x^2 - x + 2),$$

$$g(x) = (-3x^2 - x + 2)\left(-\frac{1}{3}x + \frac{10}{9}\right) + \left(\frac{16}{9}x - \frac{11}{9}\right),$$

$$-3x^2 - x + 2 = \left(\frac{16}{9}x - \frac{11}{9}\right)\left(-\frac{27}{16}x - \frac{441}{256}\right) - \frac{27}{256}.$$

2. $d=9$, $d_1=20$, $d_2=-3$, $d_3=22$. 于是解为 $x_1=20/9$, $x_2=-1/3$, $x_3=22/9$.
二. 1. $t^{n-1}\left(t+\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)$.
2. 解: 镶两条边后得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y & z \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & y^2 & z^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 & y^3 & z^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 & y^4 & z^4 \\ x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 & y^5 & z^5 \\ x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 & x_5^6 & y^6 & z^6 \end{vmatrix} = \left[\Pi_{1\le i<j\le 5}(x_j-x_i)\right]\cdot\left[\Pi_{i=1}^5(y-x_i)\right]\cdot\left[\Pi_{i=1}^5(z-x_i)\right]\cdot(z-y).$$

原行列式值即为上行列式值中 $(-1)^{3+4+6+7}(y^2z^3-y^3z^2)=y^2z^2(z-y)$ 的系数. 用 σ_i 表示 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) 的初等对称多项式. 则系数为 $\sigma_3^2\Pi_{1\le i<j\le 5}(x_j-x_i)$.
三. 解: 不可约. 令 $x=y+1$, 于是

$$\begin{aligned} x^4+4kx+1 &= (y+1)^4+4k(y+1)+1 \\ &= y^4+4y^3+6y^2+4(k+1)y+(4k+2). \end{aligned}$$

对于 $p=2$, 由 Eisenstein 判别法知不可约.
四. 证明: 以 x_1, x_2, x_3 为 $f(x)$ 的三个根, 其中 x_1 是实数. 由根与系数的关系, 知

$$a=-(x_1+x_2+x_3),\qquad b=x_1(x_2+x_3)+x_2x_3,\qquad c=-x_1x_2x_3,$$

以及

$$ab-c=-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1).$$

必要性: 若 x_1, x_2, x_3 都是实负数, 则显然 $a>0$, $c>0$, $ab>c$. 若 x_2, x_3 不是实数, 则为共轭复数, 显然有 $x_2+x_3=2\operatorname{Re}(x_2)<0$, $x_2x_3=|x_2|^2>0$, $(x_1+x_2)(x_2+x_3)=x_1^2+x_1(x_2+x_3)+x_2x_3>0$, 所以 $a>0$, $c>0$, $ab>c$.
充分性: 若 x_2, x_3 不是实数, 则为共轭复数, 所以 $x_2x_3>0$, 又因为 $c>0$, 所以 $x_1<0$. 由 x_2, x_3 是共轭复数, 有 $(x_1+x_2)(x_1+x_3)=|x_1+\operatorname{Re}x_2|^2+|\operatorname{Im}x_2|^2\ge 0$. 根据条件 $-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=ab-c>0$, 有 $2\operatorname{Re}x_2=x_2+x_3<0$. 若 x_1, x_2, x_3 都是实数, 由 $c=-x_1x_2x_3>0$ 知, 三者至少有一为负, 不妨设为 x_1, 则剩下 x_2 与 x_3 同号. 若 x_2, x_3 都是正数, 由 $x_1+x_2+x_3=-a<0$ 知, $x_1+x_3<-x_2<0$, $x_1+x_2<-x_3<0$, 这样 $(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)>0$, 这与 $ab>c$ 矛盾, 所以 x_2, x_3 只能同为负数.
五. 证明: $\sum_{i=0}^{n-1}x^i=\Pi_{i=1}^{n-1}(x-\varepsilon_i)$, 其中 $\varepsilon_i^n=1$, 且当 $i\ne j$ 时, $\varepsilon_i\ne\varepsilon_i$. 由假设有

$$\begin{cases} \varepsilon_1f_1(1)+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}f_{n-1}(1)=0, \\ \varepsilon_2f_1(1)+\cdots+\varepsilon_2^{n-1}f_{n-1}(1)=0, \\ \qquad\qquad\cdots\cdot \\ \varepsilon_{n-1}f_1(1)+\cdots+\varepsilon_{n-1}^{n-1}f_{n-1}(1)=0. \end{cases}$$

注意到系数矩阵的行列式不为 0, 所以 $f_1(1)=f_2(1)\cdots=f_{n-1}(1)=0$, 结论成立.
六. 证明: 记 $f(x)=x^n+ax^{n-m}+b$, 于是 $f'(x)=x^{n-m-1}\left(nx^m+(n-m)a\right)$. 而 $(nx^m+(n-m)a)'=nmx^{m-1}$. 因此 $(nx^m+(n-m)a)$ 的非零根的重数不超过 1, 所以 $f'(x)$ 的非零根的重数不超过 1. 故 $x^n+ax^{n-m}+b$ 的非零根的重数不超过 2.

七. 证明: 定义 $\bar{A}$ 为把 A 的每个元素取复共轭. 根据题意, $\overline{A^T} = A$, 所以有 $\overline{\det A} = \overline{\det A^T} = \det \overline{A^T} = \det A$.

八. 证明: 对方阵的阶进行归纳. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 假设结论对于 $n = k$ 成立, 现证结论在 $n = k + 1$ 时也成立. 对 $1 \le i \le n - 1$, 将方阵 A 的第 i 列减去第 n 列的 $\frac{a_{ni}}{a_{nn}}$ 倍. 这样得到的新的方阵 $\tilde{A}$ 的最后一行只剩下第 n 个位置的元素 a_{nn} 非零. $\tilde{A}$ 形式如下:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} a_{1n} & a_{12} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} a_{1n} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} a_{2n} & a_{22} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} a_{2n} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

将 $\tilde{A}$ 前 $n - 1$ 行和前 $n - 1$ 列所构成的方阵记作 $B = (b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$. 则有

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{nj}}{a_{nn}} a_{in}.$$

对于任意 $1 \le i \le n - 1$, 有

$$\begin{aligned} b_{ii} - \sum_{j \ne i} |b_{ij}| &\ge \frac{1}{a_{nn}} \left(a_{nn} a_{ii} - |a_{in}||a_{ni}| - a_{nn} \sum_{j \ne i,n} |a_{ij}| - |a_{in}| \sum_{j \ne i,n} |a_{nj}| \right) \\ &= \frac{1}{a_{nn}} \left[a_{nn} \left(a_{ii} - \sum_{j \ne i,n} |a_{ij}| \right) - |a_{in}| \sum_{j \ne n} |a_{nj}| \right]. \end{aligned}$$

根据题目条件有

$$a_{ii} - \sum_{j \ne i,n} |a_{ij}| > |a_{in}|,$$

以及

$$a_{nn} - \sum_{j \ne n} |a_{nj}| > 0.$$

所以

$$b_{ii} - \sum_{j \ne i} |b_{ij}| > \frac{1}{a_{nn}} \left[a_{nn}|a_{in}| - |a_{in}| \sum_{j \ne n} |a_{nj}| \right] \ge 0.$$

根据归纳假设, $\det B > 0$. 显然有 $\det A = \det \tilde{A} = a_{nn} \det B$. 所以 $\det A > 0$. 这样我们对于 $n = k + 1$ 也完成了证明. 所以结论对于所有 n 成立.