2019—2020 第一学期《抽象代数》期末考试

命题人：王秀玲

一、（10 分）数域F上的集合$\left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in F, b \in F\right\}$是否关于矩阵的加法和乘法构成环。

二、（10 分）写出$\mathbb{Z}_8$的单位、零元和理想

三、（10 分）在$\mathbb{Z}_5[x]$上分解$f(x) = x^3 + 2x + 3$，$g(x) = x^3 + x$并求出$f(x), g(x)$的公因式

四、（10 分）证明：$\mathbb{Z}[x] \big/ < x^2 + 1 > \cong \mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]$

五、（20 分）$R = \left\{\frac{a}{b} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}, b \text{为奇数}\right\}$，$I = \left\{\frac{a}{b} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}, b \text{为奇数}, a \text{为偶数}\right\}$

求证：（1）I是R的理想

（2）I是R的唯一极大理想

六、（20 分）设$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right] = \left\{a + b\sqrt{-3} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

（1）求出$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$的单位

（2）求证14具有唯一分解

（3）$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$是否是唯一分解整环

七、（10 分）设α是$x^3 - 6x^2 + 9x + 3$的根，求证$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$，求出$(1+\alpha)^{-1}$的逆元，用$1, \alpha, \alpha^2$表示

八、（10 分）域E是域F的二次扩张。求证：（1）若F是有理数域，求证存在整数d，使得$E = \mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$，且不存在素数$p$，使得$p^2 \mid d$（2）若$F$的特征为$2$，问是否存在

$d\in F$，使得$E=F\left[\sqrt{d}\right]$为F的二次扩张（此题第二问可能回忆有问题，若觉得有问题，有可能记错了，不必纠结）

（17 物理，雨濛整理，如有纰漏，还请见谅。另外十分感谢 15 级滕安琪学姐和 17 级李如羿同学在回忆考题时提供的帮助）