

2021-2022 学年度第一学期伯苓班抽象代数 期中考试

回忆人: xyc

一 (20 分) 判断下列命题是否正确, 如果正确请给出证明, 不正确请举出反例.

1 么半群 G 里, 元素 a 有左逆元和右逆元, 则 a 是可逆元.

2 群 G 中 a 的阶有限而 ab 的阶无限, 那么 b 的阶无限.

3 $n \in \mathbb{N}^*, G < S_n$, 则 G 中要么只有偶置换, 要么奇置换和偶置换各占一半.

4 G 是群, $H \subseteq G$, 且 $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$, 则 $H \triangleleft G$.

二 (20 分) 设 G 是群. 证明:

1 $a \rightarrow a^{-1}$ 是群 G 的自同构等价于 G 是 Abel 群.

2 若存在 $a \rightarrow a^3$ 是群 G 的单同态, 则 G 是 Abel 群.

三 (20 分) 求解下列问题:

1 求元素

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 12 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 & 7 & 5 & 10 & 15 & 11 & 13 & 14 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

的阶.

2 求 S_{15} 的 7 阶元的个数.

四 (15 分) 证明 455 阶群是循环群.

五 (15 分) 设有限群 G 的所有 Sylow p -子群都是正规子群, 则 G 可以分解成若干个 Sylow p -子群的直积.

六 (10 分) 求 A_4 的自同构群 $\text{Aut}(A_4)$.