命题人：王秀玲

回忆人:2020 级 ZZQ LCD

2022 年元旦凌晨一点回忆试题

1. 设 $\mathrm{R}=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathrm{Q}\right\}$**, 证明** R **关于矩阵的加法和乘法构成一个环, 并写出** R **的一个左零因子且它不是右零因子.**

2. 写出 $\mathbb{Z}_9$ **的理想, 素理想和极大理想.**

3. 设 R **是一个交换环,** I **是** R **的一个理想,**$I'=\{a|a\in \mathrm{R}, \exists n\in\mathbb{N}_+$**使得**$a^n\in I\}$**, 证明** I' **为** R **的一个理想.**

4.(1) 证明 $<x^2+1>$ **不是** $\mathbb{Z}[x]$ **的极大理想.**

(2) 证明 $\mathbb{Q}[x]/<x^2+1>$ **是一个域.**

5.(1) 证明:α **是环** $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ **的单位当且仅当** $\alpha=\pm 1$

(2) 证明 9 是 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ **的不可约元素，但不是素元素.**

(3)$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ **是唯一分解整环吗？**

6. 设 p **是一个素数,**$\mathrm{R}=\left\{\frac{a}{b}|\,\frac{a}{b}\in\mathbb{Q},\text{并且是不可约的}, (b,p)=1\right\}$**, 证明** R **是一个主理想整环.**

7.(1) 设 $\mathbb{K}$ **为** $\mathbb{F}$ **的扩域,** $u\in\mathbb{K}$ **是** $\mathbb{F}$ **上的代数元, 且** $deg(u,\mathbb{F})$ **为奇数, 证明:**$\mathbb{F}(u^2)=\mathbb{F}(u)$.

(2) 如果 $\mathbb{F}(u^2)=\mathbb{F}(u)$.**, 那么** u **一定是** $\mathbb{F}$ **上的代数元吗?**