2021—2022 学年第一学期抽象代数期末考试

一、令$R=\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} | a,b\in\mathbb{Q}\}$，证明$R$是环.并求$R$的一个左零因子但不是右零因子.

二、求$\mathbb{Z}_9$的所有理想、素理想和极大理想.

三、已知R是交换环，I为R的理想.证明$I(r)=\{a|a\in R,$且存在$n\in\mathbb{N}^*$使得$a^n\in I\}$.证明：$I(r)$是R的理想.

四、求$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}]$在$\mathbb{Q}$上的扩张次数和一组$\mathbb{Q}-$基.

五、(1）证明：x^2+1是$\mathbb{Z}[x]$中的不可约元素，但$\mathbb{Z}[x]/<x^2+1>$不是域;

（2）证明：$\mathbb{Q}[x]/<x^2+1>$是域.

六、令$\mathbb{Z}=\{a+b\sqrt{-5}|a,b\in\mathbb{Z}\}$.

（1）证明：若α为$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$中的单位，则$\alpha=\pm 1$;

（2）证明：3为$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$中的不可约元素，但不是素元素;

（3）$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$是不是唯一分解整环？说明理由.

七、p为素数.若已知$R=(\frac{a}{b}|\frac{a}{b}$为既约分数且$(p,b)=1\}$为有理数域$\mathbb{Q}$的子环.证明：$R$为主理想整环.

八、已知E是F的扩域.(1)若$\alpha\in E$且是F上的代数元，$\deg(\alpha,F)$为奇数，证明：$F(\alpha)=F(\alpha^2)$;

（2）若$\alpha\in E$,且$F(\alpha)=F(\alpha^2)$,问α是否是F上的代数元？说明理由.