2013-2014 学年第二学期伯苓班实变函数期末考试

1.$\{E_k\}_{1\le k\le n}$ 是 $[0,1]$ 中互不相交的可测集，对任意 $x\in[0,1]$, 至少属于 q 个 E_k, 求证：至少有一个 k, 使得 $m(E_k)\ge \frac{q}{n}$

2. 设 $f\in L^2(R)$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0, a.e.$

3.$f\in L([0,1])$ 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 n\ln(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha)dx$

4. 设 $g\in L^2(R)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}||f_n-f||_2=0$, 证明：$\int_R f_n g\to\int_R fg$

5. 设 f 在 $[-1,2]$ 绝对连续，$x\in[0,1]$, 证明：$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x+t)dt=\int_0^1 f'(x+t)dt$

6. 若 $f'=0, a.e.$ 且 f 满足 lipschitz 条件，证明 f 是常数

7.$f\in L(R), \{a_n\}$ 收敛于 0，证明存在 $\{a_n\}$ 的子列 a_{n_k}, 使得 $f(x+a_{n_k})\to 0, a.e.$

8.f 在 R^n 的任意有限测度集可积，证明：

(1) 存在某个 $k_0>1$, 使得 $m(\{|f|>k_0\})<\infty$

(2)$f=f_1+f_2$, 其中 f_1 可积，f_2 有界可测