2013-2014 学年数学类实变函数期末考试

一.(15 分) 设 A 为非可数的实数集合，证明存在整数 n，使得 $A\bigcap[n,n+1]$ 为非可数集。

二.(15 分) 设 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为一族长度大于零的区间，证明：$E=\bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$ 可测。

三.(15 分) 设 f 是可测集 E 上的可测函数，证明：对任意整数 p，函数 $|f|^p$ 也是 E 上的可测函数。

四.(15 分) 设 $f(x)$ 是区间 $(0,1)$ 上的 Lebesgue 可积函数,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{(0,1)}\frac{1}{1+e^{nf(x)}}dm.$

五.(10 分) 设 f_n,f,g 为可测集 E 上的可测函数, 如果在 E 上 $f_n\xrightarrow{m}f$, 并且 $f_n\xrightarrow{m}g$, 证明：$f=g,a.e.\ x\in E.$

六.(10 分) 设 f 于 $(0,\infty)$ 连续且 Lebesgue 可积,证明广义 Riemann 积分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛。

七.(10 分) 设 f 于 $[a,b]$ 可积且对任意区间 $I\subseteq[a,b]$ 有 $\int_I fdm\geq|I|$. 证明：$f(x)\geq 1,a.e.\ x\in[a,b].$

八.(10 分) 请举出一个在 [0,1] 上的有界变差但不是绝对连续的函数 (不用证明)。