2014-2015 学年第一学期伯苓班复变函数期末试卷

1. 设 D 是开域，$f \in H(D)$, 若 $|f(z)|$ 在 D 中是常数，证明 f 是常数

2. 设 f 在 $|z| < 1$ 中解析，$|f(z)| \leq 1, f(0) = 0$, 证明：$|f(z)| \leq |z|$, 且 $|f(0)| \leq 1$

3. 设 f 在开域 D 中解析，若 f 的零点集在 D 中有聚点 z_0, 则在 D 中，$f(z) = 0$

4. 判断 $f(z) = 2 + z^2 + e^{iz}$ 在上半平面零点的个数，并给出证明

5. 设 $f(z)$ 在 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 的收敛圆为 $|z| < 1, c_k \geq 0, k = 0, 1, 2, \cdots$, 则 $z = 1$ 为 $f(z)$ 的起点

6. 利用留数计算积分

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{(z-8)(z^{27}-1)} dz, \Gamma = |z| = 3$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{a + \cos t} dt, a > 1$$

7. 设 D 是单连通的开域，f 是 D 上单叶解析函数，且 $f(D) = G$, 证明 G 也是单连通的

8. 求分式线性变换 $w = T(z)$, 把单位圆共型映照成单位圆，使得

$$T(\frac{1}{2}) = 0, ArgT'(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$