2015-2016 学年第一学期伯苓班复变函数期末试卷

第 1 题和第 4 题不太确定 QAQ

1. 设 $f=u+iv$，且为解析函数，证明 $u\dfrac{\partial|f|}{\partial x}+v\dfrac{\partial|f|}{\partial y}=|f|\dfrac{\partial u}{\partial x}$

2. 设 f 在 $|z|\leq 1$ 上解析，而且当 $|z|=1$ 时，$|f(z)|=1$. 若 $z_1=\dfrac{1+i}{4}$ 是 f 的 1 阶零点，$z_2=\dfrac{1}{2}$ 是 f 的 2 阶零点，求证 $|f(0)|\leq\dfrac{\sqrt{2}}{16}$

3. 设 $0<r<R,\Gamma_r:z=re^{i\theta},0\leq\theta\leq 2\pi$, 证明：$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos\theta}d\theta=1$

4. 试用 Rouche 定理判断方程 $(z+1)e^{-z}=z+2$ 在右半平面内零点的个数。

5. 设开域 D 中的解析函数列 $\{f_n(z)\}_{n\geq 1}$ 紧一致收敛 $f(z)$。若在 D 中 $f(z)$ 不恒为 0，则对 $f(z)$ 的任何零点 z_0 及 z_0 的任何领域 $V(z_0,\delta)$, 必有 N, 使当 $n>N$ 时，$f_n(z)$ 在 $V(z_0,\delta)$ 中必有零点。

6. 利用留数定理计算积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}$

7. 设 f 在 $|z|<1$ 中解析。若 $|f(z)|\leq|f(z^2)|$ 或 $Ref=(Imf)^2$, 求证 f 是常数。

8. 求分式线性变换 $w=f(z)$, 将单位圆周变为直线 $Imw=0$, 使得, $f(0)=b+i,(b\in R),f'(0)<0$