2015-2016 学年伯苓班泛函分析期末

一. 判断题

(1). 度量空间 X 是有限维的，当且仅当 X 中任意有界集是列紧集

(2). 任一可分 Banach 空间有 Schauder 基

(3).X_1, X_2 为 Banach 空间，则 $X_1 \times X_2$ 为 Banach 空间

(4). 完备距离空间是第二纲集

(5).$C[a, b]$ 可分

二. 设 X 是完备的距离空间，$\{F_n\}$ 为 X 中的一列闭集，且满足 $F_{n+1} \subset F_n, \forall n \in N$，$d_n = \sup\{d(x, y)|x, y \in F_n\}, \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$，证明：$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$

三. 设算子 T 是线性算子，写出 T 是有界线性算子的定义，并证明若算子 T 是有界的，则算子 T 是连续的

四. 设赋范空间 X 是自反的，证明 X 可分当且仅当 X^* 可分

五. 设 X 为赋范空间,$x_0 \in X$

(1). 若 $x_0 \neq 0$，证明:$\exists f \in X^*, s.t.\ f(x_0) = ||x_0||, ||f|| = 1$

(2). 若 $\forall f \in X^*, f(x_0) = 0$，证明:$x_0 = 0$

(3). 证明:$||x_0|| = \sup\limits_{f\in X^*, ||f||=1} \{|f(x_0)|\}$

六. 设 $\{e_n\}$ 为内积空间 H 的标准正交系，证明：Parseval 等式成立的充要条件是 $\{e_n\}$ 是完全的