

2015级复变函数期末考试(数学类)

命题人:马世光(回忆:张万鹏)

一、求 $\int_C \frac{2z^2 - z + 1}{(z-1)(z-3)}$, 其中 $C: |z| = 2$.

二、 $f(w)$ 在 $\{w|1 < |w| < +\infty\}$ 内解析, 证明: $\int_C f\left(\frac{1}{z^2}\right)dz = 0$.

三、将 $\frac{1}{z(z-1)}$ 在 ∞ 处洛朗展开, 并判断奇点类型($1 < |z| < +\infty$).

四、证明: $f(z)$ 以 z_0 为 n 阶极点 \iff 存在 $\varphi(z) = (z - z_0)^n f(z)$.

五、(1)写出 $f(z)$, $f'(z)$ 在邻域 $B_2(0)$ 的柯西积分公式.

(2)已知 $|f'(z)| \leq 2M$, 若 $f(z) \leq M, \forall z \in \partial B_2(0)$, 证明 $f'(z) \leq 2M, \forall z \in B_1(0)$.

(3) $f'(z)$ 在 $B_2(0)$ 有界还是无界?

六、已知 $f(z)$ 的零点和极点都在邻域 $B_1(0)$ 中.

(1)写出 $f(z)$ 在 $B_1(0)$ 上的幅角原理.

(2)证明 $N(f+g, B_1(0)) - P(f+g, B_1(0)) = N(f, B_1(0)) - P(f, B_1(0))$.

(3) $\sqrt[n]{f(z)}$ 不以 ∞ 为支点, 则 n 与 $N(f, B_1(0)) - P(f, B_1(0))$ 有什么关系?