数学科学学院 2015 级实变函数期末考试

命题人: 王日生 (回忆: 张万鹏)

一、证明所有“有理抛物线” $y=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbb{Q},a\neq 0)$ 组成的集合 X 是可数集.

二、设可测集 $A\subseteq[0,1]$，$B\subseteq[1,2]$，证明 $m(A\bigcup B)=m(A)+m(B)$.

三、f,g 是集合 E 上的可测函数，$\forall p,q\in\mathbb{R}$，集合 $E_{pq}=\{x\in E:f(x)>p>q>g(x)\}$ 为零测集，证明 $f(x)\overset{a.e}{\leqslant}g(x)$.

四、若在 E 上有 $f_n\xrightarrow{m}f$，$f_n\overset{a.e}{=}g_n$，证明 $g_n\xrightarrow{m}f$.

五、定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin x^2, x\in\mathbb{Q}\bigcap[0,1]\\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}, x\in\mathbb{Q}^c\bigcap[0,1]\end{cases}$，计算积分 $\displaystyle\int_{[0,1]}f\mathrm{d}m$.

六、$f(x)$ 于 $(0,+\infty)$ Lebesgue 可积，求 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{(0,+\infty)}\frac{f(x)}{1+nx}\mathrm{d}m$.

七、$f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，$f(0)=0$，证明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 绝对连续.

八、定义在 $[a,b]$ 上的有界变差函数 f 满足 $\displaystyle\bigvee_a^b(f)<1$，且 f_n 逐点收敛到 f，证明 f_n 也是有界变差函数.