数学科学学院 2015 级泛函分析期末考试

命题人: 王日生 (回忆: 张万鹏)

一、设 c_{00} 是有限项不为 0 的数列的全体，证明 c_{00} 可分.

二、f 是 Banach 空间 E 上的有界线性泛函，当 $ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0\}$ 为闭子空间时，证明 f 有界.

三、$T(x) = \{\alpha_n \xi_n\} \in l^1$，$\{\alpha_n\}$ 是有界数列，$x = \{\xi_n\} \in l^1$. 证明：

(1)$\|T\| \leqslant \sup\{|\alpha_n|\}$;

(2) 若 T^{-1} 存在且有界，证明 $\inf|\alpha_n| > 0$.

四、L 是 X 的闭子空间，$x_0 \notin L$，$L_0 = \{\alpha x_0 + y : \alpha \in \mathbb{R}, y \in L\}$. 证明 L_0 是 X 的闭子空间.

五、(1) 叙述谱与特征值的定义；

(2)$Tx = \{\eta_n\}, x = \{\xi_n\}$. 其中 $\eta_0 = 0, \eta_k = -\xi_k (k \geqslant 2)$. 证明 T 不存在特征值.

六、设 H 是实内积空间，$(e_i, e_j) = 0 (i \neq j)$. 证明：$\|e_1 + e_2 + e_3\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \|e_3\|^2$.

七、H 是 Hilbert 空间，$x_n, x_0 \in H, \|x_n\| \to \|x_0\|, (x_n, x_0) \to (x_0, x_0)$. 证明 $x_n \to x_0$.