南开大学本科生2017- 2018学年第二学期《实变函数》期末考试试卷(B卷)

草 稿 区

任课教师:　　　　专业:　　　　年级:　　　　学号:　　　　姓名:　　　　成绩:

得 分

一、(15分) 设 $\mathbb{R}$ 上的集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如下: $A_{2m+1} = [0, 2 - \frac{1}{2m+1}], A_{2m} = [0, 1 + \frac{1}{2m}]$ $(m = 1, 2, \cdots)$. 求 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n, \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

得 分

二、(15分) 证明: 由直线上互不相交的开区间作为集合 $\mathcal{A}$ 的元素, 则 $\mathcal{A}$ 是至多可数的.

草 稿 区

得 分

三、(20分) 设 $0 < m^*(E) < \infty$. 证明: 对任意的 $\alpha \in (0,1)$, 存在开区间 I 使得 $m^*(E \cap I) > \alpha|I|$.

得 分

四、(20分) 构造闭区间 $[a,b]$ 上的可测函数 f, 使得对于 $[a,b]$ 上的任意连续函数 φ, 都有 $m([f \neq \varphi]) > 0$.

草 稿 区

得 分

五、(10分) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 且 $m(E) < +\infty$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 上的一列可测函数. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$ 在 E 上几乎处处成立. 证明: 对任意的 $\delta > 0$, 存在可测集 $e \subset E$ 满足 $m(e) < \delta$, 使得 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $E \setminus e$ 上一致趋向于 $+\infty$.

得 分

六、(10分) 计算 $\displaystyle\int_E e^{-[x]} dm$, 其中 $E = [0, +\infty)$, $[x]$ 表示 x 的整数部分.

草 稿 区

得 分

七、(10分)设 f, f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 是可测集 E 上的可测函数, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n| dm = \int_E |f| dm$. 证明: 对 E 中的任意可测子集 e, 均有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n| dm = \int_e |f| dm.$$