南开大学本科生2018- 2019学年第二学期《实变函数》期末考试试卷(B卷)

草 稿 区

任课教师:　　专业:　　年级:　　学号:　　姓名:　　成绩:

得 分

一、 (10分). 证明:至多可数个至多可数集的并仍然是至多可数集.

得 分

二、 (15分) 设E 是实数集$\mathbb{R}$的子集, 则E是可测当且仅当对任意的$A \subset E$和 $B \subset E^c$, 有

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B).$$

草 稿 区

得 分

三、 (15分) 设函数f在 $[a,b]$ 上可微, 则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可测函数.

得 分

四、 (15分) 设 $m(E)>0$, $f(x),g(x)$ 是 E 上的可积函数, 且满足 $f(x)<g(x)$. 试证明

$$\int_E f(x)dm < \int_E g(x)dm.$$

草 稿 区

得 分

五、 (15分) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是正测度集, 则存在 $x_1, x_2 \in E$, 使得 $|x_1 - x_2|$ 为无理数.

得 分

六、 (15分) 设 $A, B, C \subset \mathbb{R}$ 且有

$$m^*(A \triangle B) = m^*(B \triangle C) = 0.$$

试证明 $m^*(A \triangle C) = 0$.

草 稿 区

得 分

七、 (15分) 设 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的一列非负可积函数且 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n dm < \infty$. 试证明: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 几乎处处收敛于一个可积函数 $f(x)$, 并且有

$$\int_E f dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n dm.$$