

2019—2020 第一学期复变函数期末考题

命题人：王险峰

一、(15分) 试用留数定理计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta + 2\sin\theta}$$

二、(20分) 设函数 $f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z^2}$ ，求出 $f(z)$ 在扩充复平面（包括无穷远点）的奇点，并判断奇点类型。写出 $f(z)$ 在各个奇点邻域的洛朗展开式。

三、(15分) 设有一分式线性变换 $L(z)$ 把单位圆 $|z| < 1$ 映成单位圆 $|\omega| < 1$ ，且满足 $L\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ， $L'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ，求出该分式变换。

四、(20分) 设 $f(z)$ 是整函数，且 $f(z)$ 的值域有外点，试问 $f(z)$ 是否是常数。如果是，请给出证明；如果不是，请举出反例。

五、(20分) 设 $f(z)$ 在曲线 C 内部是亚纯的且连续到 C ，且至多有有限个极点，且满足 $|f(z) + 1| < 3$ 。求证 $f(z) = 2$ 的在 C 的内部根与 $f(z)$ 在 C 的内部的极点个数一样多。

六、(15分) 设 $f(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析，且 $f(0) = a$ (a 不为零)， $|f(z)| < 1$ ($|z| < 1$)。求证 $f(z)$ 在区域 $K = \{z: |z| < |a|\}$ 内没有零点。

注：2019年12月31日差20分零点，跨年夜回忆考题。

(17 物理 雨濛回忆)