# 南开大学本科生2019- 2020学年第二学期《实变函数》期末考试试卷(B卷)

草 稿 区

任课教师:　　专业:　　年级:　　学号:　　姓名:　　成绩:

| 得 分 |
| --- |
| |

一、 (10分) 设 $G_1$ 与 $G_2$ 为 $\mathbb{R}$ 中的两个稠密开集. 证明: $G_1 \cap G_2$ 仍在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

| 得 分 |
| --- |
| |

二、 (15分) 设 $A_i$ 是 $[0,1]$ 中的可测子集 $(i=1,2,\cdots,n)$, 如果 $\sum_{i=1}^{n} m(A_i) > n-1$, 证明: $m(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) > 0$.

草 稿 区

| 得 分 |
|---|
| |

三、 (15分) 证明: $\mathbb{R}$ 上的单调函数一定为可测函数.

| 得 分 |
|---|
| |

四、 (15分) 设 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是有界变差函数, $g$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上满足Lipschitz 条件, 也即是: 存在常数 $L>0$, 使得

$$|g(x)-g(y)|\leq L|x-y|,\quad \forall x,y\in(-\infty,+\infty).$$

试证明: $g\circ f$ 在 $[a,b]$ 上是有界变差函数.

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

五、 (15分) 设函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在可测集 $E$ 上依测度收敛于 $f$, 且对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 均有

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

证明: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

六、 (15分) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\infty}(1+\frac{x}{n})^{-n}x^{-\frac{1}{n}}dx=1.$

草 稿 区

| 得 分 |
| --- |
| |

七、 (15分) 设 $f$ 为定义在 $[1,+\infty)$ 上的可测函数, 且对于任一个正整数 $n$, 函数 $f$ 均在 $[n,n+1)$ 上 Lebesgue 可积. 令 $a_n=\int_{[n,n+1)} f dm$.

(1) 证明: 若 $f$ 在 $[1,+\infty)$ 上可积, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

(2) 举例说明第一问的逆命题不成立.