南开大学本科生2019- 2020学年第二学期《实变函数》期末考试试卷(C卷)

草 稿 区

任课教师:　　专业:　　年级:　　学号:　　姓名:　　成绩:

得 分

一、 (10分)证明: 平面 $\mathbb{R}^2$ 与正方形 $I = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ 是对等的.

得 分

二、 (15分) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调函数 f, 其不连续点是至多可数集.

草 稿 区

得 分

三、 (15分) 设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathbb{R}$ 中一列可测集. 若存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{m(E_n \cap (x-\epsilon, x+\epsilon))}{2\epsilon} = 1$$

对于所有的自然数 n 均成立. 证明: $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中任意有限多个集合的交均不为零测集.

草 稿 区

得 分

四、 (15分) 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续实值函数, g 为 $\mathbb{R}$ 上的可测函数. 证明: $g \circ f$ 为可测函数.

得 分

五、 (15分) 设 f 为可测集 E 上的 Lebesgue 可积函数. 证明: 对于任意的$\lambda > 0$, 均有

$$m\left(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda} \cdot \int_E |f| dm.$$

草 稿 区

得 分

六、 (15分) 设 E 为可测集, $m(E) < +\infty$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 上一列几乎处处有限的可测函数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n|dm = 0$. 证明: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上依测度收敛到零.

草 稿 区

得 分

七、 (15分) 证明: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{e^t - x}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2+1}$, 其中 $-1 \le x \le 1$.