# 2020——2021 第一学期《泛函分析》期末考试

命题人: 王日生

2021 年 1 月 7 日

一. （15 分） 设 $A_1$ 和 $A_2$ 是度量空间 $X$ 中的两个集合，记 $d(A_1,A_2)=\inf_{x\in A_1,y\in A_2} d(x,y)$。证明存在 $X$ 中的不交开集 $G_1$,$G_2$, 分别包含 $A_1$,$A_2$。

二. （15 分） 设 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间中的数列，$\forall f\in X^\star$, 数列 $\{f(x_n)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，证明 $\{x_n\}$ 是有界数列。

三. （15 分） 设 $f$ 是 $C[0,1]$ 上的线性泛函, 且 $f(x)=\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)dt$。证明 $f$ 是连续的并求 $\|f\|$。

四.（15 分） 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是可分赋范空间, 证明存在可数子集 $\Phi \subset X^\star$，使得对于每一个 $x \in X$, 使得 $\|x\| = \sup_{f\in\Phi} |f(x)|$。

五.（15 分） 设 $S$ 是 $l^2 \to l^2$ 上的线性算子，且满足

$$Sx(k) = x(k+2) \quad k = 1, 2, \cdots \quad \{x(k)\} \in l^2.$$

试求 $\lim_{n\to\infty} \|S^n\|$。

六.（15 分） 设 $f$ 是 Banach 空间 $X$ 到 $\mathcal{R}$ 上的线性泛函，$f$ 是不是常数函数，试证 $f$ 是开映射。(PS: 我确信没有有界这个条件)

七. （10 分） 设 $H$ 是 Hibert 空间，$H_0$ 是 $H$ 的闭子空间，设 $x_0 \in H$, 证明:

$$\inf_{x\in H_0}\|x-x_0\| = \max_{y\in H_0^{\perp},\|y\|=1} |(x_0,y)|.$$

(回忆人: 物化 defector)