2021-2022上学期傅里叶分析期末考试

TYC整理

2021.12.30

1.(1)叙述$f,g\in L(\mathbb{R}^2)$的卷积定义;

(2)设$f=\chi_{[-2,2]}(x)$(特征函数),求$f*f$.

2.设$f,K\in L(\mathbb{R}^n)$,且$\int_{\mathbb{R}^n}K(x)\mathrm{d}x=a,K_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon^n}K(\dfrac{x}{\varepsilon})$.求证:

(1)在f的连续点x处,$\lim_{\varepsilon\to0}f*K_\varepsilon(x)=af(x)$.

(2)设$f\in C_0(\mathbb{R}^n)$,求证$\{f*K_\varepsilon(x)\}$关于ε一致收敛于$af(x)$.

3.设$T=[-\pi,\pi],f\in L(T)$,$f(x)$的Fourier级数为$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$.求证:

(1)$f(x+h)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikh}c_ke^{inx}$;

(2)设f在$[-\pi,\pi]$绝对连续，求证$f'(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}ikc_ke^{ikx}$.

4.设$f(x)=\dfrac{1}{2}(\pi-x),0<x<2\pi$.

(1)求$f(x)$的Fourier级数;

(2)求Fourier级数的和函数;

(3)求$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$;

(4)求$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

5.(1)设$f\in L(\mathbb{R}^n)$,求证f的Fourier变换$\hat{f}$是一致连续的有界函数;

(2)设μ是$\mathbb{R}^n$上的复测度,求证μ的Fourier变换$\hat{\mu}$是一致连续的有界函数.

6.(1)设T是可逆线性变换,T^t为其转置,$f\in L(\mathbb{R}^n)$,记$g(x)=f(Tx)$,求证:$\hat{g}(x)=|\det(T)|^{-1}\hat{f}(T^{-t}x)$;

(2)设$f,g\in L^2(\mathbb{R}^n)$,证明乘法公式: $\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x$.

7.(1)当$1\le p\le\infty$时证明$S(\mathbb{R}^n)\subset L^p(\mathbb{R}^n)$;当$p=\infty$时,证明$S(\mathbb{R}^n)\subset C_0(\mathbb{R}^n)$.

(2)求证:Fourier变换是$S(\mathbb{R}^n)\to S(\mathbb{R}^n)$上的连续线性算子.