2020——2021 第一学期《图论》期末考试

命题人: 金应烈

2020 年 12 月 23 日

一. (15 分) 选择题

1. (3 分) 给定顶点集和边集判断是否为强连通图。
2. (3 分) 利用握手定理求顶点数和边数。
3. (3 分) 完全 m 叉树顶点数、内点、叶子数目关系。
4. (3 分) 给定编码集合，找出哪个不是前缀码。
5. (3 分) 不存在完美匹配的是 (奇圈)。

二. (15 分) 填空题

1. 由三个顶点组成的不同构的无向图有__________个,组成的不同构的有向图有__________个。
2. 已知平面图有 6 个顶点，每个顶点的度为 4，则此平面图有__________面。
3. 对于完全二部图 $K_{m,n}$，$\gamma(K_{m,n}) =$ __________，$\chi'(K_{m,n}) =$ __________。

三. (46 分) 证明题

1. (8 分) 连通图 G 具有 $Euler$ 路的充分必要条件是 G 中有两个奇点。

2. (8 分) 设平面连通图 G 中没有长为 3 的圈，证明:
(1)q 为 G 的边数，p 为 G 的顶点数，$q \le 2p - 4$。
(2) $\delta(G) \le 3$。

3. (10 分) 设 $\chi(G)$ 为图 G 的色数，证明 $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$。

4. (10 分) 证明：(1) 若 $\delta(G) \geq 2$, 则 G 中含有圈。
(2) 树至多只有一个完美匹配。

5. (10 分) 平面上的 n 个点被一些圆盘覆盖，且每个圆盘至少覆盖住 $[\frac{n}{2}]+1$ 个点，证明对于任意两个点，总存在连接两点的曲线，使这条曲线完全被圆盘覆盖。(其中 $[x]$ 为取整函数)
(提示：构造图 G，顶点为圆盘，两个顶点相邻当且仅当有同一个点被圆盘覆盖，证明 G 为连通图。)

四．（24 分） 简答题

1. (10 分) 对于圈 C_n，求 $\alpha(G)$,$\beta(G)$,$\alpha^{'}(G)$,$\beta^{'}(G)$,$\gamma(G)$。

2. (7 分) 设顶点的权分别为 $2, 3, 5, 7, 8$。
   (1) 构造最优二叉树 T，并计算 $\omega(T)$。
   (2) 写出每个顶点对应的前缀码。

3. (7 分) 指出边色数和匹配数之间的关系，并说明理由。(提示：$\chi^{'}(G)\alpha^{'}(G) \geq |\epsilon(G)|$)

(17 物理，雨濠回忆)