2020——2021 第一学期《信息论》期末考试

命题人: 光炫

2021 年 1 月 11 日

一. 设 X,Y 是状态空间 $\{0,1,2\}$ 上的两个离散随机变量, 其联合概率分布矩阵为:

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 计算 $H(X), H(X,Y), H(X|Y), I(X;Y)$。
2. 计算 $D(P_X||P_Y)$ 和 $D(P_Y||P_X)$。
3. 画出 (1) 中的 Venn 图

二. 设 X, Y, Z 是三个随机变量:

1. 试举出反例说明 $I(X;Y)=0$ 与 $I(X;Y|Z)=0$ 一般不能相互推导。
2. 若 $X \to Y \to Z$ 构成一个 Markov Chain, 且 $I(X;Y)=0$，证明 $I(X,Y|Z)=0$。

三. 设 q_1, q_2 是两个非负实数，且满足 $q_1 + q_2 > 0$。

1. (Pooling inequality) 试证明:$-(q_1+q_2)\log(q_1+q_2) \le -q_1\log q_1 - q_2\log q_2 \le -(q_1+q_2)\log(\frac{q_1+q_2}{2})$ 且第一个等号成立条件为 $q_1q_2 = 0$, 第二个等号成立条件为 $q_1 = q_2$。
2. 设 X, Y 是状态空间 $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$ 上的两个随机变量, X, Y 相互独立, 且有 $H(Y) = \log p$。设 $Z = X + Y \mod p$, 试证明:$H(Z) = \log p$。

四. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是 i.i.d 序列，记

$$C_n(t) = \{x^n \in \mathcal{X}^n : p(x^n) \ge 2^{-nt}\}.$$

试证明:

1. $|C_n(t)| \le 2^{nt}$。
2. 给出 t 取什么值时，使得 $\lim_{n\to\infty} Pr(x^n \in C_n(t)) = 1$。

五. 设一个离散随机变量的概率分布为 $0.5, 0.4, 0.1$,

1. 构造一个二元 Huffman Code 并计算平均码长。
2. 构造一个二元 Shannon Code 并计算平均码长。
3. 求最小的 D，使得 D 元 Huffman code 与 D 元 Shannon Code 的平均码长相同。

六. 设编码器, 解码器的状态空间分为 $\mathcal{X}$， $\mathcal{Y}$，且有 $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=\{0,1,2\}$。信道的状态转移矩阵为:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. 试求此信道的信道容量。
2. 对称信道是指信道转移矩阵 $p(y|x)$ 的任何两行置换，任何两列置换。试给出对称信道的信道容量并给出证明。

七. 设 $\mathcal{C}_1=(\mathcal{X}_1,\mathbb{P}_1,\mathcal{Y}_1)_{\mathcal{X}_1,\mathcal{Y}_1}$， $\mathcal{C}_2=(\mathcal{X}_2,\mathbb{P}_2,\mathcal{Y}_2)_{\mathcal{X}_2,\mathcal{Y}_2}$ 是两个离散无记忆信道 (DMC), 其信道容量分别为 C_1,C_2。考虑信道 $\mathcal{C}=(\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2,\mathbb{P},\mathcal{Y}_1\times\mathcal{Y}_2)_{\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2,\mathcal{Y}_1\times\mathcal{Y}_2}$，其中 $\mathbb{P}$ 为 $p(y_1,y_2|x_1,x_2)=p_1(y_1|x_1)p_2(y_2|x_2)$, $\forall(x_1,x_2)\in\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2,\forall(y_1,y_2)\in\mathcal{Y}_1\times\mathcal{Y}_2$。即每次输入两个字符 x_1,x_2，得到两个字符 y_1,y_2。试求此信道的信道容量。

(17 物理, 雨濛回忆)