数学科学学院基地班2014 — 2015学年第一学期《数学分析》期中考试试卷(A卷)

草 稿 区

专业:　　**年级:**　　**学号:**　　**姓名:**　　**成绩:**

得 分

一、(12分) 用$\varepsilon-\delta$语言陈述下列命题.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq\infty$;

答. 存在$M_0>0$, 对任意$\delta>0$, 存在x_δ, 使得$0<|x_\delta-x_0|<\delta$且$|f(x_\delta)|\leqslant M_0$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在的柯西收敛原理;

答. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在的充分必要条件为：对任何$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 使当$x,x'\in(x_0-\delta,x_0)$时，有$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

(3) $f(x)$在点x_0处右连续.

答. 对任何$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 当$x_0\leqslant x<x_0+\delta$时, 有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

得 分

二、(10分) 陈述并证明复合函数的连续性定理.

答. 复合函数的连续性定理：设函数$y=g(x)$在点x_0连续, $y_0=g(x_0)$, 函数$f(y)$在点y_0连续, 则复合函数$f(g(x))$在点x_0连续.

证明. 对于任给的$\varepsilon>0$, 因为函数$f(y)$在点y_0连续, 故有$\eta>0$, 当$|y-y_0|<\eta$时, 就有

$$|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon.$$

对于上述的$\eta>0$, 因$y=g(x)$在点x_0连续, 故有$\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 就有

$$|y-y_0|=|g(x)-g(x_0)|<\eta.$$

由此当$|x-x_0|<\delta$时, 就有

$$|f(g(x))-f(g(x_0))|=|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon.$$

由定义知复合函数$f(g(x))$在点x_0连续.

草 稿 区

得 分

三、(20分) 求下列各极限.

(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+n^n}}{n}$;

解. 因为

$$1=\frac{\sqrt[n]{n^n}}{n}\leqslant\frac{\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+n^n}}{n}\leqslant\frac{\sqrt[n]{n\cdot n^n}}{n}=\sqrt[n]{n}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 所以根据两边夹定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+n^n}}{n}=1$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2(\sin x)}$.

解. 因为当 $x\to0$ 时，有 $\sin x\sim x$ 和 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，所以利用等价无穷小量的替换，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2(\sin x)}\\
=&\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2(\sin x)}\\
=&\lim_{x\to0}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos x}{\sin^2 x}\\
=&\lim_{x\to0}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^2}{2}}{x^2}\\
=&\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

四、(10分) 求函数$f(x)=[x^2]\sin(\pi x)$的间断点并指出间断点的类型，其中$[\cdot]$是取整函数.

解. 因为$\sin(\pi x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$[x^2]$在$\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$上连续，所以$f(x)$在$\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$上连续. 当$n$是完全平方数时，$\pm\sqrt{n}$是整数. 对任何整数$k$, 由$f(k)=0=\lim\limits_{x\to k}[x^2]\sin(\pi x)=\lim\limits_{x\to k}f(x)$可知$f(x)$在点$k$处连续; 当$n$不是完全平方数时，用$\alpha$来记$\sqrt{n}$, 则$\alpha$不是整数，于是$\sin(\pi\alpha)\neq 0$. 又$\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=n\sin(\pi\alpha)$, $\lim\limits_{x\to\alpha^-}f(x)=(n-1)\sin(\pi\alpha)$, 所以点$\alpha$是$f(x)$的第一类间断点, 同理$-\sqrt{n}$也是$f(x)$的第一类间断点. 综上所述，$f(x)$的间断点集是$\{\pm\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}$且$n$不是完全平方数$\}$，这个集合的每个元素都是$f(x)$的第一类间断点.

得 分

五、(10分) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，对任意实数a, 都有$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(a+x)-2f(a)+f(a-x)]=0$, 证明函数$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的常数函数.

证. 因为$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，所以$f(-x)=f(x)$. 取$a=0$, 由$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(a+x)-2f(a)+f(a-x)]=0$得$\lim\limits_{x\to+\infty}[2f(x)-2f(0)]=0$, 故$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(0)$. 于是对任意实数$a$, 有

$$\lim_{x\to+\infty}f(a+x)=\lim_{y\to+\infty}f(y)=f(0),\ \text{其中}y=a+x,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(a-x)=\lim_{x\to+\infty}f(x-a)=\lim_{z\to+\infty}f(z)=f(0),\ \text{其中}z=x-a.$$

由$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(a+x)-2f(a)+f(a-x)]=0$得$f(0)-2f(a)+f(0)=0$, 故$f(a)=f(0)$. 由$a$的任意性知函数$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的常数函数.

草 稿 区

得 分

六、设$x_1=0,\ y_1=1,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2},\ y_{n+1}=\dfrac{x_n+2y_n}{3},\ n=1,2,\cdots$.

(1) (10分) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$;

(2) (14分) 证明$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(1) 证. 因为

$$y_{n+1}-x_{n+1}=\frac{x_n+2y_n}{3}-\frac{x_n+y_n}{2}=\frac{1}{6}(y_n-x_n),\ n=1,2,\cdots,$$

所以

$$y_n-x_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}(y_1-x_1)=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=0.$$

(2) 证. 因为

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n+y_n}{2}-x_n=\frac{y_n-x_n}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1},\ n=1,2,\cdots,$$

所以

$$x_n=\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)+x_1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{2\left(1-\frac{1}{6}\right)}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{2\left(1-\frac{1}{6}\right)}=\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{6}\right)}=\frac{3}{5}.$$

草 稿 区

得 分

七、(8分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$f(0)=0$, $f(1)=1$, 且对任意实数x和y, $x-y$是有理数当且仅当$f(x)-f(y)$是有理数, 证明$f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

证. 令$g(x)=f(x+1)-f(x)$, 则$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$g(0)=1$, 且$g(x)$恒为有理数. 根据连续函数的介值定理，$g(x)$只能是常数函数，故$g(x)\equiv 1$. 于是对任意整数n, 有$f(n)=n$. 同理可证，对任意正整数$m>1$, $f\left(x+\frac{1}{m}\right)-f(x)$恒为常数. 再由$\sum\limits_{k=1}^{m-1}\left[f\left(\frac{k+1}{m}\right)-f\left(\frac{k}{m}\right)\right]=f(1)-f(0)=1$知$f\left(x+\frac{1}{m}\right)-f(x)\equiv\frac{1}{m}$. 于是对任意正整数$m$和任意整数$n$, 有$f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}$, 即$f(x)=x$, $x\in\mathbb{Q}$. 对任意$x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 取一个收敛于$x$的有理数列$\{r_n\}$, 由$f(x)$的连续性得，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$. 因此，$f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

得 分

八、(6分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(f(x))=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=-\infty$, 证明：$f(x)$不是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

证. 反证. 若不然，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 又因为$\lim\limits_{x\to\infty}f(f(x))=\infty$, 所以根据3.4节的例3知$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. 对$M=1$, 存在$X>0$, 当$x>X$时，有$|f(x)|>M=1$. 因此根据介值定理，当$x>X$时，$f(x)$恒大于1或恒小于$-1$. 于是$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$或$-\infty$. 同理可证，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$或$-\infty$. 下面分情形讨论.

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$的情形. 这时$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty$, 与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=-\infty$矛盾.

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$的情形. 这时$\lim\limits_{x\to-\infty}f(f(x))=-\infty$, 与$\lim\limits_{x\to-\infty}f(f(x))=+\infty$矛盾.

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$的情形. 这时$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty$, 与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=-\infty$矛盾.

综上所述，无论如何总有矛盾，故假设不成立. 因此$f(x)$不是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.