

2014-2015 数学类数学分析3-1期末考试

一、计算：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} [n - n^2 \ln \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right)]$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x - x}{\ln x + x - 1}$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}}$$

$$(4) \int \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

二、用致密性定理证明柯西收敛原理

三、用有限覆盖定理证明闭区间上连续函数必有界

四、定义于 $(-1, 1)$ 上的连续函数 $f(x)$ 三次可微，已知 $f'(0) = f(-1) = 0, f(1) = 1$,证明：
 $\exists x_0 \in (-1, 1)$,使得 $f'''(x_0) = 0$

五、设 $f(x) = x^\alpha \ln x$,定义于 $(0, +\infty)$,讨论 α 取何值时，该函数一致连续。