

# 数学科学学院2015级数学分析3-1期末考试

命题人:朱少红 (回忆人:张万鹏)

一、计算下列极限

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$ ;

(2) 已知 $f(x)$ 连续可导, 且有 $f'(0) = 0$ ,  $f''(0)$ 存在, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\sin x)}{x^4}$ .

二、定义在 $[0, 2]$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = f(2)$ ,  $|f''(x)| \leq 1$ ,  $f(x)$ 三次可微. 证明 $\exists \xi \in [0, 2]$ 使得 $|f'''(\xi)| \leq \sqrt{3}$ .

三、用区间套定理证明确界原理.

四、已知 $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 \ln x}{x+1}}$ . 判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的一致连续性.

五、用致密性定理证明闭区间上连续函数的有界定理.

六、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微,  $f(0) = 0$ , 对任何 $x \in (0, 1)$ ,  $f(x) \neq 0$ . 证明  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\exists \xi_n \in (0, 1)$ , 使得

$$\frac{nf'(\xi_n)}{f(\xi_n)} = \frac{f'(1 - \xi_n)}{f(1 - \xi_n)}$$