数学科学学院伯苓班2015 — 2016学年第二学期“数学分析3-2”期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、(66分，前三个小题每小题10分，后三个小题每小题12分) 按要求解答下列各题.

(1) 求积分$\int_{-1}^{1}(3x^2+1)\arctan x\,\mathrm{d}x$;

解. 因为$(3x^2+1)\arctan x$是奇函数，所以$\int_{-1}^{1}(3x^2+1)\arctan x\,\mathrm{d}x=0$. $\square$

(2) 判断极限$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 2}}\left(\frac{x+y}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$是否存在, 如果存在并求其值;

解. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 2}}\left(\frac{x+y}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$存在. 因为$\left(\frac{x+y}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\left[\left(1+\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\right]^{\frac{xy}{x+y}}$,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 2}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}} &= \lim_{t\to 0^+}(1+t)^{\frac{1}{t}}\ \left(\text{其中}t=\frac{y}{x}\right)=\mathrm{e},\\ \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 2}}\frac{xy}{x+y} &= \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 2}}\frac{y}{1+\frac{y}{x}}=2,\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 2}}\left(\frac{x+y}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\mathrm{e}^2$. $\square$

草 稿 区

(3) 设z为由方程$z=f(xz,z-y)$确定的x, y的隐函数, 求全微分$\mathrm{d}z$;

解. 方程两边微分，得

$$\mathrm{d}z=f_1'\cdot(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z)+f_2'\cdot(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y),$$

解得

$$\mathrm{d}z=-\frac{zf_1'}{xf_1'+f_2'-1}\mathrm{d}x+\frac{f_2'}{xf_1'+f_2'-1}\mathrm{d}y.$$

□

(4) 求函数$f(x,y)=4\ln y+\dfrac{(x-1)^2+(y-2)^2}{y^2}$的极值；

解. 函数$f(x,y)$的定义域是$D=\{(x,y)\big|y>0\}$. 由$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ 得

$$\begin{cases}\frac{2(x-1)}{y^2}=0,\\ \frac{4}{y}-\frac{2(x-1)^2}{y^3}+\frac{4}{y^2}-\frac{8}{y^3}=0.\end{cases}$$

解得$x=1$, $y=1$或$x=1$, $y=-2$. 因为$(1,-2)\notin D$, 所以函数$f(x,y)$有唯一临界点$(1,1)$. 因为

$$H_f(1,1)=\begin{pmatrix}f_{xx}''(1,1) & f_{xy}''(1,1)\\ f_{yx}''(1,1) & f_{yy}''(1,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$$

是正定矩阵，所以由极值的充分条件知$(1,1)$是$f(x,y)$的极小值点，函数$f(x,y)$有极小值$f(1,1)=1$. □

草 稿 区

(5) 在自变量和因变量的变换下，将$z=z(x,y)$的方程变换为$w=w(u,v)$的方程，其中$u=x$, $v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$, $w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$, 方程为

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2;$$

解. 由$x=u$和$w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$得$z=\frac{u}{wu+1}$, 故由链式法则得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\
&= \frac{1\cdot(wu+1)-u\left(u\frac{\partial w}{\partial u}+w\right)}{(wu+1)^2}\cdot 1+\frac{-u\cdot u\frac{\partial w}{\partial v}}{(wu+1)^2}\cdot\frac{1}{x^2}\\
&= \frac{1}{(wu+1)^2}-\frac{u^2}{(wu+1)^2}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{u^2}{x^2(wu+1)^2}\frac{\partial w}{\partial v},\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\
&= \frac{-u\cdot u\frac{\partial w}{\partial v}}{(wu+1)^2}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\\
&= \frac{u^2}{y^2(wu+1)^2}\frac{\partial w}{\partial v}.
\end{aligned}$$

因此$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$化为

$$\frac{x^2}{(wu+1)^2}-\frac{x^2u^2}{(wu+1)^2}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{u^2}{(wu+1)^2}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{u^2}{(wu+1)^2}\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{u^2}{(wu+1)^2},$$

注意到$x=u$, 上式就化简为

$$\frac{u^4}{(wu+1)^2}\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

又因为$u=x\neq 0$, 所以进一步化简为$\frac{\partial w}{\partial u}=0$. □

草 稿 区

(6) 设$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上连续可微，对任何实数x, y, t, 有$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$, 已知点$P_0(1,-2,2)$在曲面$S:z=f(x,y)$上，且$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)=6$, 求$\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$的值，并写出曲面$S$在点$P_0$处的切平面方程.

解. 因为$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$, 所以由齐次函数的欧拉定理知

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2f(x,y).$$

由点$P_0(1,-2,2)$在曲面$S:z=f(x,y)$上知$f(1,-2)=2$, 又$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)=6$, 故$1\cdot 6-2\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=2\cdot 2$, 解得$\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=1$. 因为曲面$S$在点$P_0$处的法向量为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2),\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2),-1\right)=(6,1,-1),$$

所以曲面S在点P_0处的切平面方程为

$$6(x-1)+(y+2)-(z-2)=0,\ \text{即}6x+y-z-2=0.$$

□

得 分

二、(10分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上可微，对任意$x\in[a,b]$, 有$0<f(x)\leqslant f'(x)$, 求证：$\displaystyle\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{f(a)}-\frac{1}{f(b)}$.

证. 令$\varphi(t)=\displaystyle\int_a^t\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x-\frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(t)}$, $t\in[a,b]$, 则$\varphi(a)=0$,

$$\varphi'(t)=\frac{1}{f(t)}-\frac{f'(t)}{f^2(t)}=\frac{f(t)-f'(t)}{f^2(t)}.$$

因为对任意$x\in[a,b]$, 有$0<f(x)\leqslant f'(x)$, 所以$\varphi'(t)\leqslant 0$. 于是$\varphi(t)$在$[a,b]$上单调递减，故$\varphi(b)\leqslant\varphi(a)=0$, 即$\displaystyle\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x-\frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(b)}\leqslant 0$, 也即

$$\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{f(a)}-\frac{1}{f(b)}.$$

□

草 稿 区

得 分

三、(10分) 设$D = (-\infty, +\infty) \times [0,1]$, 函数$f(x,y)$在$D$上一致连续，对任意实数$x$, 令$g(x) = \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$, 求证：$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证. 因为函数$f(x,y)$在D上一致连续，所以对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 对任何$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$, 只要$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta$, 就有$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$. 于是对任何实数$x_1$, x_2, 当$|x_1 - x_2| < \delta$时，对任何$y \in [0,1]$, 都有$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \varepsilon$. 因此，当$|x_1 - x_2| < \delta$时，有

$$\begin{aligned}
|g(x_1) - g(x_2)| &= \left|\int_0^1 f(x_1,y)\mathrm{d}y - \int_0^1 f(x_2,y)\mathrm{d}y\right| = \left|\int_0^1 [f(x_1,y) - f(x_2,y)]\mathrm{d}y\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |f(x_1,y) - f(x_2,y)|\mathrm{d}y < \int_0^1 \varepsilon \mathrm{d}y = \varepsilon.
\end{aligned}$$

按定义知$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续. □

得 分

四、(8分) 设$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是连续映射，存在常数$L > 0$，使得对任何$X, Y \in \mathbb{R}^n$, 有$|F(X) - F(Y)| \geqslant L|X - Y|$, 求证：对$\mathbb{R}^n$中的任意紧集$K$, 其完全原像$F^{-1}(K)$也是$\mathbb{R}^n$中的紧集.

证. 只需证明$F^{-1}(K)$是$\mathbb{R}^n$中的列紧集. 任取点列$\{X_m\} \subseteq F^{-1}(K)$, 令$Y_m = F(X_m)$, 则$Y_m \in K$. 因为$K$是$\mathbb{R}^n$中的紧集，所以$K$是$\mathbb{R}^n$中的列紧集. 于是$\{Y_m\}$有收敛于$K$中点$Y_0$的子列$\{Y_{m_k}\}$. 因为$\{Y_{m_k}\}$收敛，所以$\{Y_{m_k}\}$是柯西列，从而对任意$\varepsilon > 0$, 存在正整数$K$, 当$k > K$, $l > K$时，有$|Y_{m_k} - Y_{m_l}| < \varepsilon$, 即$|F(X_{m_k}) - F(X_{m_l})| < \varepsilon$. 因为对任何$X, Y \in \mathbb{R}^n$, 有$|F(X) - F(Y)| \geqslant L|X - Y|$, 所以当$k > K$, $l > K$时，有

$$|X_{m_k} - X_{m_l}| \leqslant \frac{1}{L}|F(X_{m_k}) - F(X_{m_l})| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

故$\{X_{m_k}\}$是柯西列，由柯西收敛原理知$\{X_{m_k}\}$收敛. 设$\lim\limits_{k\to\infty} X_{m_k} = X_0$, 则由$F$的连续性得$\lim\limits_{k\to\infty} F(X_{m_k}) = F(X_0)$, 即$\lim\limits_{k\to\infty} Y_{m_k} = F(X_0)$. 因此$F(X_0) = Y_0$, 再由$Y_0 \in K$知$X_0 \in F^{-1}(K)$. 于是$\{X_m\}$有收敛于$F^{-1}(K)$中点$X_0$的子列$\{X_{m_k}\}$, 按定义知$F^{-1}(K)$是$\mathbb{R}^n$中的列紧集. □

草 稿 区

得 分

五、(6分) 设$D=[0,1]\times[0,1]$, 函数$f(x,y)$在D上可微，$f(0,0)+f(0,1)+f(1,0)+f(1,1)=0$, 对任何$(x,y)\in D$, 有$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant 1$, 求证：对任何$(x,y)\in D$, 有$|f(x,y)|\leqslant\frac{3}{4}$.

证. 首先证明“对任何$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, 有$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$”. 若$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$, 则显然等式成立，故下设$(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$. 由多元函数的微分中值定理知在$(x_1,y_1)$, (x_2,y_2)为端点的线段上存在一点(ξ,η), 使得

$$f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(x_1-x_2)+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)(y_1-y_2).$$

记$M=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$, 则由上式以及条件$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant 1$得

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\right|\cdot|x_1-x_2|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\right|\cdot|y_1-y_2|\leqslant M\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\right|+M\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\right|\leqslant M.$$

这就证明了“对任何$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, 有$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$”.

对任何$(x,y)\in D$, 由上面的命题以及条件$f(0,0)+f(0,1)+f(1,0)+f(1,1)=0$得

$$\begin{aligned}4|f(x,y)| &= |4f(x,y)-f(0,0)-f(0,1)-f(1,0)-f(1,1)|\\ &\leqslant |f(x,y)-f(0,0)|+|f(x,y)-f(0,1)|+|f(x,y)-f(1,0)|+|f(x,y)-f(1,1)|\\ &\leqslant \max\{x,y\}+\max\{x,1-y\}+\max\{1-x,y\}+\max\{1-x,1-y\}.\end{aligned}$$

由对称性，不妨设$0\leqslant x\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$, 则由上式得

$$4|f(x,y)|\leqslant y+(1-y)+(1-x)+(1-x)=3-2x\leqslant 3.$$

因此，对任何$(x,y)\in D$, 有$|f(x,y)|\leqslant\frac{3}{4}$. □