

# 数学科学学院2015级数学分析3-2期中考试

命题人:朱少红 (回忆人:张万鹏)

一、计算下列极限.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{1}{2x-y}$$

二、计算下列积分.

$$(1) \int_1^e (x \ln x)^2 dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

三、已知  $a_n \in [a, b]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ ,  $\{a_n\}$  为  $f$  在  $[a, b]$  上仅有的间断点, 求证  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

四、设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续可微且  $f(0) = f(1) = 0$ . 证明对所有  $t \in [0, 1]$ , 都有  $f^2(t) \leq \frac{1}{4} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$ .

五、证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\sqrt{n}}^n \frac{\sin x^2}{x} dx = 0$ .

六、讨论  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{(x^2+y^2)^p}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$  ( $p > 0$ ) 在点  $(0, 0)$  处的连续性.