

## 南开大学数学科学学院 2016-2017 学年第一学期数学分析期末测试

命题：刘锐

一、求下列极限：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2 \ln(\cos x) - 1}{x^4}$$

二、求下列不定积分：

$$(1) \int \frac{2x^3}{(x+1)^2(x^2+1)} dx; \quad (2) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2+1}}$$

三、已知函数  $f(x) = e^{\cos x} - e^{x+1} \cos x$ 。将其麦克劳林展开式写到  $x^3$  项。四、已知  $e^y + xy = e$ 。求  $\frac{dy}{dx}$  与  $\frac{d^2y}{dx^2}$  的值。五、已知函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  在  $[0,1]$  连续， $(0,1)$  二次可导，且  $g''(x)$  恒不为零。求证：

$$\text{存在 } \xi \in (0,1), \text{ 使得 } \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)} = \frac{f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)}{g(0) - 2g\left(\frac{1}{2}\right) + g(1)}.$$

六、已知函数  $f(x)$  在区间  $[a,b]$  上连续可导，且在  $[a,b]$  上存在无穷多个零点。求证：存在  $\xi \in [a,b]$ ，使得  $f(\xi) = f'(\xi) = 0$ 。七、已知函数  $f(x)$  在区间  $(a, +\infty)$  可导， $f''(x)$  在  $(a, +\infty)$  上有界。若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ ，求证：

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x} = 0.$$