数学科学学院2015级数学分析3-3期中考试(数学类)

命题人:丁龙云 (回忆人:张万鹏)

一、计算下列积分

(1)$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，$L: x^2+y^2=ax$.

(2)$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$.

二、判断下列级数的收敛性

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)$.

三、S是锥体$z=\sqrt{x^2+y^2}$在圆柱$x^2+y^2\leqslant 2x$内的部分，求$\iint_S z\mathrm{d}S$.

四、判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt[n]{2}(n+1)}$的敛散性.

五、设D是$\mathbb{R}^2$上带有逐段光滑边界的有界闭区域，$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$为拉普拉斯算子.若$u\in C^2(D), v\in C^1(D)$，$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$表示$u$沿$\partial D$关于区域$D$的外法向量导数，求证

$$\iint_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s.$$

六、$\vec{F}(x,y,z)=f(r)\vec{r}$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}(r\neq 0)$，$\vec{r}=(x,y,z)$，证明$\int_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$与路径无关.

七、$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，$\frac{f(x)}{x}$在$[a,+\infty)$上单调递减趋于0.证明$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

八、记p_n表示第n个素数.证明$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}=+\infty$.