2017~2018学年 数学分析 3-3 期中测试

· 命题：丁龙云　　· 讲解：祝文壮

一、计算以下级数与积分：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

$\because \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5(n+1)-4}\right)$

$\therefore S_n = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(5k-4)(5k+1)} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{5n+1}\right)$

从而 $\sum \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right) = \frac{1}{5}$

(2) $\int_L \sqrt{y}\, ds$　　$L: \begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$　　$0<t\leq 2\pi$

$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}$

$\therefore ds = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos t}\, dt$

$\therefore \int_L \sqrt{y}\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{a}\cdot\sqrt{1-\cos t}\cdot a\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos t}\, dt = \sqrt{2}\, a^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\, dt$

$= 2\sqrt{2}\pi\cdot a^{\frac{3}{2}}$

(3) 求环面Σ面积　　$\Sigma: \begin{cases} x = (b+a\cos\theta)\cos\varphi \\ y = (b+a\cos\theta)\sin\varphi \\ z = a\sin\theta \end{cases}$　　$(0<a<b)$

$x_\theta = -a\sin\theta\cos\varphi$　　$y_\theta = -a\sin\theta\sin\varphi$　　$z_\theta = a\cos\theta$

$x_\varphi = -(b+a\cos\theta)\sin\varphi$　　$y_\varphi = (b+a\cos\theta)\cos\varphi$　　$z_\varphi = 0$

$E = a^2$　　$G = (b+a\cos\theta)^2$　　$F = 0$

$S = \iint_\Sigma ds = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \sqrt{EG-F^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} a(b+a\cos\theta)\, d\varphi = 4\pi^2 ab$

二、判断以下级数敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+1}=\frac{3}{4}<1$

$\therefore$ 级数收敛

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$

$\because \frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\sim\frac{1}{6n^3}$

由 $\sum\frac{1}{n^3}$ 收敛，级数收敛

三、判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)\ln n}$ 是绝对收敛，条件收敛还是发散.

$\left|\frac{(-1)^n n}{(n+1)\ln n}\right|=\frac{n}{(n+1)\ln n}>\frac{1}{2\ln n}$ 由 $\sum\frac{1}{\ln n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\ln n}$ 发散. 不绝对收敛

令 $u_n=\frac{n}{(n+1)\ln n}$ $n\to\infty$ 时显然 $u_n\to 0$

令 $f(x)=\frac{x}{(x+1)\ln x}$ $f'(x)=\frac{\ln x-(x+1)}{(x+1)^2\ln^2 x}<0$ $\therefore u_n$ 递减

由Leibniz判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)\ln n}$ 收敛.

综上：原级数条件收敛

四、计算 $I=\iint_S\frac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中S是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

令 $P=\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$ $Q=\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$ $R=\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$

当 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 时 有 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$

由于 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 是 $P.Q.R$ 的瑕点

我们做如下处理：

作曲面 $\Sigma: ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2$，使 ε 充分小，使得 Σ 包含在 S 内部. （Σ 取外侧）

设 Σ 和 S 围成的有洞空间区域为 Ω. 则: $S+\Sigma_-$ 为 Ω 外侧

记 Ω 围成的空间区域为 Ω_1，Σ 为 Ω_1 外侧

由 Gauss 公式

$$\iint_{S-\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=0$$

$$\therefore \iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iint_\Sigma P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_\Sigma x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$$

$$(\text{由 Gauss 公式})\quad =\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_1}3\,dxdydz=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot V(\Omega_1)$$

以下计算椭球 $ax^2+by^2+cz^2\leq\varepsilon^2$ 的体积:

原方程化为 $\dfrac{x^2}{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt a}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt b}\right)^2}+\dfrac{z^2}{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt c}\right)^2}\leq 1$

由椭球体积公式 $V(\Omega_1)=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt a}\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt b}\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt c}=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{\varepsilon^3}{\sqrt{abc}}$

上式 $=\dfrac{4\pi}{\sqrt{abc}}$

五. $a_n>-1$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散. 证明 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=0$

$\because \ln\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=0$，

$\therefore$ 由 Taylor 展开，$\ln(1+a_k)=a_k-\frac{a_k^2}{2}+o(a_k^2)<a_k-\frac{a_k^2}{4}$

由题意 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=c$，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k^2=+\infty$

$\therefore \ln\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)<\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-\frac{a_k^2}{4}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\to-\infty$

$\therefore \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\to 0\quad(n\to\infty)$

即 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=0$

六、$P, Q \in C'(\mathbb{R}^2)$ 对 $\forall (a,b)$ 与 r，设曲线 $C: (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 有 $\int_C Pdx+Qdy=0$

证明：$\int_L Pdx+Qdy$ 的积分与路径无关

以下证明 对 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

反设 $\exists (x_0,y_0)$ s.t. $\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$

不妨设 $\left.\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{(x_0,y_0)}=a>0$. 记 $f(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$

由于 $P, Q\in C'(\mathbb{R}^2)$，由保号性，$\exists r_0>0$. 使得：

在邻域 $\{(x,y)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r_0^2\}$ 上，$f(x,y)>\frac{a}{2}$ 恒成立

设 $C_0: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r_0^2$，$C_0$ 的内部为 D

由Green公式 $\int_{C_0} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy > \frac{a}{2}\iint_D dxdy>0$

与题设矛盾.

$\therefore$ 对 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ $\therefore \int_L Pdx+Qdy$ 的积分与路径无关

七. 设 $a_n>0$ $(n=1,2,3\cdots)$ $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$

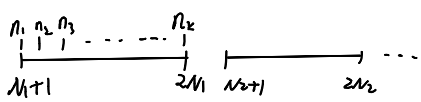
求证：存在一列正整数 $n_1<n_2<n_3<\cdots$ 满足：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}=+\infty$ 而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$ 收敛

在 $\mathbb{N}^*$ 中找一列 $\{N_i\}$：$N_1<N_2<N_3<\cdots$ 满足 $2N_1\le N_2$，$2N_2\le N_3$，$\cdots$

$\{N_i\}$ 的取法：N_1 满足：对 $\forall n>N_1$，有 $na_n<\frac{1}{2}$

对已取定的 N_i，取 $N_{i+1}\ge 2N_i$ 满足：对 $\forall n>N_{i+1}$，$na_n<\frac{1}{2^{i+1}}$

令 $\{n_k\}$ 是 $\{n: N_i<n\le 2N_i, i=1,2,\cdots\}$ 中严格递增的排列



此时 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N_i+1}^{2N_i}\frac{1}{n}>\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N_i+1}^{2N_i}\frac{1}{2N_i}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}=+\infty$

由 $n>N_i$ 时 $na_n<\frac{1}{2^i}$ $\Rightarrow a_n<\frac{1}{n\cdot 2^i}$

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N_i+1}^{2N_i}a_{n_k}<\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N_i+1}^{2N_i}\frac{1}{n\cdot 2^i}<\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N_i+1}^{2N_i}\frac{1}{N_i\cdot 2^i}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1$