数学科学学院伯苓班2019 — 2020学年第一学期“数学分析”期中考试试卷(A卷)

草 稿 区

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、(10分) 设$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在，且$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. 证明：存在$\delta > 0$, 使得对任意$x \in (x_0-\delta, x_0)$和任意$y \in (x_0, x_0+\delta)$, 都有$f(x) < f(y)$.

证　设$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = b$, 则$a < b$. 取$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$, 由单侧极限的定义知，对上述的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta_1 > 0$和$\delta_2 > 0$, 使得当$x \in (x_0-\delta_1, x_0)$时，有$|f(x)-a| < \varepsilon$, 当$y \in (x_0, x_0+\delta_2)$时，有$|f(y)-b| < \varepsilon$. 令$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 则对任意$x \in (x_0-\delta, x_0)$和任意$y \in (x_0, x_0+\delta)$, 有

$$f(x) < a+\varepsilon = \frac{a+b}{2} = b-\varepsilon < f(y).$$

得 分

二、(12分) 设A_n, B_n和C_n分别是数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$和$\{c_n\}$的前n项和，已知$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明：若数列$\{A_n\}$和$\{C_n\}$都收敛，则数列$\{B_n\}$也收敛.

证　因为数列$\{A_n\}$和$\{C_n\}$都收敛，所以由柯西收敛原理知对任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在正整数N, 使得当$n > N$时，对任意正整数p, 有$|A_{n+p}-A_n| < \varepsilon$和$|C_{n+p}-C_n| < \varepsilon$. 由$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, $n = 1, 2, \cdots$得

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p} \leqslant b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p} \leqslant c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots+c_{n+p},$$

即$A_{n+p}-A_n \leqslant B_{n+p}-B_n \leqslant C_{n+p}-C_n$. 因此，当$n > N$时，对任意正整数$p$, 有$|B_{n+p}-B_n| < \varepsilon$. 根据柯西收敛原理知数列$\{B_n\}$收敛.

草 稿 区

得 分

三、(共20分，每小题10分) 计算下列各题.

(1) 设$a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$, 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{1-(1+ax)^b}}$.

解　先计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-(1+ax)^b}\cdot\ln(\cos x + a\sin bx)$. 因为当$x\to 0$时，有$\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^\alpha - 1\sim \alpha x$(其中$\alpha\neq 0$), $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, $\sin x\sim x$, 所以由等价无穷小量代换的方法得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-(1+ax)^b}\cdot\ln(\cos x + a\sin bx) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{-b\cdot ax}\cdot(\cos x + a\sin bx - 1)\\ =\ &\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{abx} - \lim_{x\to 0}\frac{a\sin bx}{abx} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{abx} - \lim_{x\to 0}\frac{a\cdot bx}{abx} = 0 - 1 = -1.\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{1-(1+ax)^b}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-(1+ax)^b}\cdot\ln(\cos x + a\sin bx)} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(2) 设$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{2x_{n+1}} - \mathrm{e}^{2x_n})$.

解　记$H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, 则$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 其中γ是欧拉常数，$\{\varepsilon_n\}$是一个无穷小量. 由$x_n + \dfrac{1}{2}H_n = H_{2n}$得

$$2x_n = 2H_{2n} - H_n = 2\ln(2n) + 2\gamma + 2\varepsilon_{2n} - \ln n - \gamma - \varepsilon_n = 2\ln 2 + \ln n + \gamma + 2\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n.$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{2x_{n+1}} - \mathrm{e}^{2x_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{2x_n}\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{2n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{2x_n}\cdot\frac{2}{2n+1}\\ =\ &\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{2x_n + \ln 2 - \ln(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{2\ln 2 + \ln\frac{2n}{2n+1} + \gamma + 2\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n} = \mathrm{e}^{2\ln 2 + \gamma} = 4\mathrm{e}^{\gamma}.\end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

四、(共31分，其中第(1)问和第(2)问各12分，第(3)问7分)

(1) 任意取定正整数m, 令$x_n^{(m)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(1+\frac{k}{m})\cdot 2^k}$, $n=1,2,\cdots$. 证明：数列$\left\{x_n^{(m)}\right\}$收敛；

(2) 记$y_m=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(m)}$, $m=1,2,\cdots$. 证明：$\lim\limits_{m\to\infty}y_m=1$；

(3) 问：数列$\{m(y_m-1)\}$是否收敛？证明你的结论.

(1) 证　因为$x_n^{(m)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(1+\frac{k}{m})\cdot 2^k}<\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{(1+\frac{k}{m})\cdot 2^k}=x_{n+1}^{(m)}$, $n=1,2,\cdots$, 所以数列$\left\{x_n^{(m)}\right\}$严格单调递增. 又

$$x_n^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{k}{m})\cdot 2^k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^n}<1,$$

故由单调收敛定理知数列$\left\{x_n^{(m)}\right\}$收敛

(2) 证　对任意正整数n, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{k}{m})\cdot 2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right|=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{m}}{(1+\frac{k}{m})\cdot 2^k}$$
$$=\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(m+k)\cdot 2^k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{m\cdot 2^k}=\frac{1}{m}\cdot\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}\right)<\frac{2}{m}.$$

令$n\to\infty$取极限，得$|y_m-1|\leqslant\dfrac{2}{m}$. 因此，由$1-\dfrac{2}{m}\leqslant y_m\leqslant 1+\dfrac{2}{m}$, $m=1,2,\cdots$, 根据两边夹定理知$\lim\limits_{m\to\infty}y_m=1$.

(3) 解　数列$\{m(y_m-1)\}$收敛. 证明如下. 对任意正整数n, 有

$$\left|m\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{k}{m})\cdot 2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right]+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{-mk}{(m+k)\cdot 2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\right|$$
$$=\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(m+k)\cdot 2^k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{m\cdot 2^k}=\frac{1}{m}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\cdot 2^k}.$$

因为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\cdot 2^k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2^k}-\frac{n^2}{2^n}<1+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}}<1+4+1=6,$$

草 稿 区

所以

$$\left|m\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{k}{m})\cdot 2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right]+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\right|<\frac{6}{m}.$$

令$n\to\infty$取极限，得$|m(y_m-1)+2|\leqslant\dfrac{6}{m}$. 因此，由$-2-\dfrac{6}{m}\leqslant m(y_m-1)\leqslant -2+\dfrac{6}{m}$, $m=1,2,\cdots$, 根据两边夹定理知$\lim\limits_{m\to\infty}m(y_m-1)=-2$.

得 分

五、(12分) 设$\{x_n\}$是一个有界数列，$x_n\neq 0$, $n=1,2,\cdots$. 证明：存在数列$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$, 使得$\left\{\dfrac{x_{n_{k+1}}}{x_{n_k}}\right\}$收敛.

证　分$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$和$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq 0$两种情形讨论.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$的情形.

这时，由无穷小量的定义知对任意给定的ε, 存在正整数N, 当$n>N$时，有$|x_n|<\varepsilon$. 取下标n_1, 使得$|x_{n_1}|<1$. 取$n_2>n_1$, 使得$|x_{n_2}|<x_{n_1}^2$. 一般地，当x_{n_k}已取定, 取$n_{k+1}>n_k$, 使得$|x_{n_{k+1}}|<x_{n_k}^2$. 一直这样做下去，就得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$. 因为

$$0<\left|\frac{x_{n_{k+1}}}{x_{n_k}}\right|<|x_{n_k}|\leqslant|x_{n_1}|^{2^{k-1}},\quad k=1,2,\cdots,$$

所以由两边夹定理知$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{n_{k+1}}}{x_{n_k}}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq 0$的情形.

这时，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$中至少有一个不等于0. 不妨设$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=H\neq 0$, 则数列$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_k}\}$收敛于$H$. 于是有$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{n_{k+1}}}{x_{n_k}}=\dfrac{H}{H}=1$.

草 稿 区

得 分

六、(10分) 已知常数$\beta \in (0,1)$，问：是否存在集合$S \subseteq (0,1)$, 使得S是无限集，$\sup S = \beta$, 且对任意$x, y \in S$, $x < y$, 都有$\dfrac{x}{y} \in S$? 若存在，求出满足条件的所有的S; 若不存在，说明理由.

解　存在集合S满足条件. 令$S = \left\{\beta^n \middle| n = 1, 2, \cdots\right\}$, 则$S$满足条件. 显然，$S$是无限集. 由$\beta$是$S$的最大元知$\sup S = \beta$. 对任意$x, y \in S$, $x < y$, 存在正整数k, m, $k > m$, 使得$x = \beta^k$, $y = \beta^m$, 于是$\dfrac{x}{y} = \beta^{k-m} \in S$. 下面证明这是唯一一个满足条件的集合.

先证明若S满足条件，则$\beta \in S$. 反证. 若不然，则S没有最大元. 于是对任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$x \in S$, 使得$x > \beta - \varepsilon$. 任意取定$x_1 \in S$, 取$x_2 \in S$, 使得$x_2 > \beta - \min\left\{\beta - x_1, \frac{1}{2}\right\}$. 一般地，当$x_n \in S$已取定，取$x_{n+1} \in S$, 使得$x_{n+1} > \beta - \min\left\{\beta - x_n, \frac{1}{n+1}\right\}$. 一直这样做下去，就得到严格递增的数列$\{x_n\} \subseteq S$, 满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$. 由题设知$\dfrac{x_n}{x_{n+1}} \in S$, 故$\dfrac{x_n}{x_{n+1}} < \beta$, $n = 1, 2, \cdots$. 于是有$0 < x_1 < \beta x_2 < \beta^2 x_3 < \cdots < \beta^n x_{n+1} < \beta^n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 由两边夹定理知$x_1 = 0$, 与$x_1 > 0$矛盾!

再证明若S满足条件，则对任意$x \in S$, 存在正整数n, 使得$x = \beta^n$. 反证. 若不然，则存在$x \in S$和正整数n, 使得$\beta^{n+1} < x < \beta^n$. 因为$\beta \in S$, 所以由题设知$\dfrac{x}{\beta}$, $\dfrac{x}{\beta^2}$, $\cdots$, $\dfrac{x}{\beta^n}$都属于S. 但是，$\dfrac{x}{\beta^n} > \beta$, 与$\beta$是$S$的最大元矛盾!

最后证明若S满足条件，则$S = \left\{\beta^n \middle| n = 1, 2, \cdots\right\}$. 由前面的证明知$\beta \in S$且$S \subseteq \left\{\beta^n \middle| n = 1, 2, \cdots\right\}$. 因为$S$是无限集，所以对任意正整数$n$, 存在正整数$m > n$, 使得$\beta^m \in S$. 于是$\beta^{m-1}$, β^{m-2}, $\cdots$, β^n都属于S. 由n的任意性知$S = \left\{\beta^n \middle| n = 1, 2, \cdots\right\}$.

草 稿 区

得 分

七、(5分) 设$0 < \alpha < \beta < 1$. 证明：存在实数x, 使得对任意正整数n, 都有$\{x^n\} \in [\alpha, \beta]$, 其中$\{x^n\} = x^n - [x^n]$是$x^n$的小数部分.

证　取定正整数m_1, 使得$m_1(\beta-\alpha) > 2$. 令$a_1 = m_1 + \alpha$, $b_1 = m_1 + \beta$, 则对任意$t \in [a_1, b_1]$, 有$\{t\} \in [\alpha, \beta]$. 因为$b_1^2 - a_1^2 > a_1(b_1 - a_1) > m_1(\beta - \alpha) > 2$, 所以存在正整数$m_2$, 使得$[m_2+\alpha, m_2+\beta] \subseteq [a_1^2, b_1^2]$. 令$a_2 = \sqrt{m_2+\alpha}$, $b_2 = \sqrt{m_2+\beta}$, 则$[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$, 且对任意$t \in [a_2, b_2]$, 有$\{t^2\} \in [\alpha, \beta]$. 因为$b_2^3 - a_2^3 > a_2(b_2^2 - a_2^2) > m_1(\beta - \alpha) > 2$, 所以存在正整数$m_3$, 使得$[m_3 + \alpha, m_3 + \beta] \subseteq [a_2^3, b_2^3]$. 令$a_3 = \sqrt[3]{m_3+\alpha}$, $b_3 = \sqrt[3]{m_3+\beta}$, 则$[a_3, b_3] \subseteq [a_2, b_2]$, 且对任意$t \in [a_3, b_3]$, 有$\{t^3\} \in [\alpha, \beta]$. 一般地，当$[a_n, b_n]$已取定，有$b_n^n - a_n^n = \beta - \alpha$. 因为$b_n^{n+1} - a_n^{n+1} > a_n(b_n^n - a_n^n) > m_1(\beta-\alpha) > 2$, 所以存在正整数$m_{n+1}$, 使得$[m_{n+1}+\alpha, m_{n+1}+\beta] \subseteq [a_n^{n+1}, b_n^{n+1}]$. 令$a_{n+1} = \sqrt[n+1]{m_{n+1}+\alpha}$, $b_{n+1} = \sqrt[n+1]{m_{n+1}+\beta}$, 则$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, 且对任意$t \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$, 有$\{t^{n+1}\} \in [\alpha, \beta]$. 一直这样做下去，就得到区间套$\big\{[a_n, b_n] \big| n = 1, 2, \cdots\big\}$, 满足

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$;

(ii) 对任意$t \in [a_n, b_n]$, 有$\{t^n\} \in [\alpha, \beta]$, $n = 1, 2, \cdots$.

由(i)和区间套定理的证明知$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset$, 故存在$x \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$. 再由(ii)知对任意正整数n, 都有$\{x^n\} \in [\alpha, \beta]$.