数学科学学院伯苓班2019 — 2020学年第一学期“数学分析3-1”期末考试试卷(A卷)

草 稿 区

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

得 分

一、(10分) 设$y=y(x)$是由方程$\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$确定的隐函数，求$y''(0)$.

解　在方程$\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$中令$x=0$, 得$\mathrm{e}^y=\mathrm{e}$, 解得$y=1$. 在等式$\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$两边对$x$求导，得$\mathrm{e}^y y'+y+xy'=0$, 解得$y'=-\dfrac{y}{\mathrm{e}^y+x}$. 将$x=0$, $y=1$代入上式，得$y'(0)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 在等式$\mathrm{e}^y y'+y+xy'=0$两边对$x$求导，得$\mathrm{e}^y(y')^2+\mathrm{e}^y y''+y'+y'+xy''=0$, 解得$y''=-\dfrac{\mathrm{e}^y(y')^2+2y'}{\mathrm{e}^y+x}$. 将$x=0$, $y=1$, $y'(0)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$代入上式，得

$$y''(0)=-\frac{\mathrm{e}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^2}-\frac{2}{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}.$$

得 分

二、(10分) 设$f(x)=(x^2+1)(\sin x+\cos x+\tan x)$, 求$f^{(10)}(0)$.

解　令$g(x)=(x^2+1)(\sin x+\tan x)$, $h(x)=(x^2+1)\cos x$, 则$f(x)=g(x)+h(x)$. 由$g(x)$是奇函数知$g^{(10)}(x)$也是奇函数，故$g^{(10)}(0)=0$. 由莱布尼茨公式得

$h^{(10)}(x)=(x^2+1)(\cos x)^{(10)}+\mathrm{C}_{10}^1\cdot 2x\cdot(\cos x)^{(9)}+\mathrm{C}_{10}^2\cdot 2\cdot(\cos x)^{(8)}=-(x^2+1)\cos x-20x\sin x+90\cos x$,

故$h^{(10)}(0)=-1-0+90=89$. 于是

$$f^{(10)}(0)=g^{(10)}(0)+h^{(10)}(0)=0+89=89.$$

草 稿 区

得 分

三、(10分) 设$x\in(0,1)$, 证明：$x^x+(1-x)^{1-x}\geqslant\sqrt{2}$.

证　令$f(x)=x^x$, 则$f'(x)=\left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)'=\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$, $f''(x)=x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}$. 由此可见$f''(x)$在$(0,1)$中恒大于0, 故$f(x)$在$(0,1)$严格下凸. 由下凸函数的定义知，对任意$x\in(0,1)$, 有

$$x^x+(1-x)^{1-x}=f(x)+f(1-x)\geqslant 2f\left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}.$$

另证　由均值不等式得$x^x+(1-x)^{1-x}\geqslant 2x^{\frac{x}{2}}(1-x)^{\frac{1-x}{2}}$, 故为证明$x^x+(1-x)^{1-x}\geqslant\sqrt{2}$, 只需证明$x^{\frac{x}{2}}(1-x)^{\frac{1-x}{2}}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 这个不等式等价于$x^x(1-x)^{1-x}\geqslant\dfrac{1}{2}$. 令$f(x)=x\ln x+(1-x)\ln(1-x)$, 为证明$x^x(1-x)^{1-x}\geqslant\dfrac{1}{2}$, 只需证明$f(x)\geqslant\ln\dfrac{1}{2}$. 由$f'(x)=\ln x+1-\ln(1-x)-1=\ln x-\ln(1-x)$知$f'(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$小于0, 在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$大于0, 故$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$严格递减，在$\left[\dfrac{1}{2},1\right)$严格递增. 因此，对任意$x\in(0,1)$, 有$f(x)\geqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\dfrac{1}{2}$. 这就完成了证明.

得 分

四、(12分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$两次可导，$|f(x)|^3$在$(-\infty,+\infty)$下凸. 证明：对任意实数x, 有$f(x)f''(x)+2[f'(x)]^2\geqslant 0$.

证　令$g(x)=|x|^3$, 则$g'(x)=3\operatorname{sgn}x\cdot x^2$, $g''(x)=6\operatorname{sgn}x\cdot x$. 记$h(x)=|f(x)|^3$, 则$h(x)=g(f(x))$, 于是$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$, $h''(x)=g''(f(x))[f'(x)]^2+g'(f(x))f''(x)$. 因此，

$$h''(x)=6\operatorname{sgn}f(x)\cdot f(x)\cdot[f'(x)]^2+3\operatorname{sgn}f(x)\cdot[f(x)]^2\cdot f''(x)=3|f(x)|\left[f(x)f''(x)+2[f'(x)]^2\right].$$

由$h(x)=|f(x)|^3$在$(-\infty,+\infty)$下凸知$h''(x)\geqslant 0$, 故对任意实数x, 有$|f(x)|\left[f(x)f''(x)+2[f'(x)]^2\right]\geqslant 0$. 若$f(x)\neq 0$, 则由$|f(x)|\left[f(x)f''(x)+2[f'(x)]^2\right]\geqslant 0$得$f(x)f''(x)+2[f'(x)]^2\geqslant 0$; 若$f(x)=0$, 则$f(x)f''(x)+2[f'(x)]^2=2[f'(x)]^2\geqslant 0$.

草 稿 区

得 分

五、(12分) 设函数$f(x)$在$[-1,1]$连续，在$(-1,1)$无穷次可导，对任意自然数n和任意$x\in(-1,0)\cup(0,1)$, 都有$\left|f^{(n)}(x)\right|<n!|x|$. 证明：$f(x)$在$[-1,1]$上恒等于0.

证　因为对任意自然数n和任意$x\in(-1,0)\cup(0,1)$, 都有$\left|f^{(n)}(x)\right|<n!|x|$, 所以由两边夹定理知$\lim\limits_{x\to0}f^{(n)}(x)=0,\ n=0,1,2,\cdots$. 再结合$f^{(n)}(x)$在$(-1,1)$连续，得$f^{(n)}(0)=\lim\limits_{x\to0}f^{(n)}(x)=0,\ n=0,1,2,\cdots$. 于是对任意$x\in(-1,0)\cup(0,1)$, 由泰勒公式得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta_nx)}{n!}x^n=\frac{f^{(n)}(\theta_nx)}{n!}x^n,\ n=1,2,\cdots,$$

其中$\theta_n\in(0,1)$. 因为$\left|f^{(n)}(x)\right|<n!|x|$, 所以

$$|f(x)|=\frac{\left|f^{(n)}(\theta_nx)\right|}{n!}|x|^n<|\theta_nx|\cdot|x|^n<|x|^{n+1}.$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}|x|^{n+1}=0$, 所以$f(x)=0$. 这就证明了$f(x)$在$(-1,1)$中恒等于0, 再结合$f(x)$在$[-1,1]$连续即知$f(x)$在$[-1,1]$上恒等于0.

得 分

六、(12分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可导，$f(0)=0,\ f(1)=1$. 证明：存在$\xi,\eta\in(0,1)$, $\xi<\eta$, 使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$.

证　由拉格朗日中值定理知存在$c\in(0,1)$, 使得$f'(c)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$. 若存在$d\in(0,1)$, $d\neq c$, 使得$f'(d)=1$, 则取$\xi=\min\{c,d\}$, $\eta=\max\{c,d\}$即可. 若方程$f'(x)=1$在$(0,1)$中只有$x=c$这一个根，则由达布定理知$f'(x)$在$(0,c)$和$(c,1)$中恒大于1或恒小于1. 若$f'(x)$在$(0,c)$和$(c,1)$中都恒大于1, 令$g(x)=f(x)-x$, 则$g(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可导. 因为$g'(c)=0$, $g'(x)$在$(0,c)$和$(c,1)$中都恒大于0, 所以$g(x)$在$[0,1]$严格递增. 但这与$g(0)=0=g(1)$矛盾！因此，$f'(x)$不能在$(0,c)$和$(c,1)$中都恒大于1. 同理可证$f'(x)$不能在$(0,c)$和$(c,1)$ 中都恒小于1. 不妨设$f'(x)$在$(0,c)$中恒小于1, 在$(c,1)$中恒大于1, 则由达布定理知存在$a\in(0,c)$, 使得$f'(a)\in(0,1)$. 任意取定一点$b\in(c,1)$, 考虑$f'(a)f'(b)$. 若$f'(a)f'(b)=1$, 则取$\xi=a$, $\eta=b$即可；若$f'(a)f'(b)>1$, 则由达布定理知存在$\eta\in(c,b)$, 使得$f'(a)f'(\eta)=1$, 取$\xi=a$即可；若$f'(a)f'(b)<1$, 则由达布定理知存在$\xi\in(a,c)$, 使得$f'(\xi)f'(b)=1$, 取$\eta=b$即可. 这就完成了证明.

另证　令$g(x)=f(x)-(1-x)$, 则$g(x)$在$[0,1]$连续，$g(0)=-1$, $g(1)=1$. 于是由零点存在定理知存在$c\in(0,1)$, 使得$g(c)=0$, 即$f(c)=1-c$. 由拉格朗日中值定理知存在$\xi\in(0,c)$, $\eta\in(c,1)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{1-c}{c},\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{c}{1-c}.$$

所以，$f'(\xi)f'(\eta)=\dfrac{1-c}{c}\cdot\dfrac{c}{1-c}=1.$

草 稿 区

得 分

七、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n\ln n}-n^2}{\ln(n!)}$.

解　由等价量代换的方法以及泰勒公式，得

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n\ln n}-n^2\\
=\ & \mathrm{e}^{n\ln n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}-\mathrm{e}^{2\ln n}\\
=\ & \mathrm{e}^{2\ln n}\cdot\left[\mathrm{e}^{n\ln n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-2\ln n}-1\right]\\
\sim\ & \mathrm{e}^{2\ln n}\cdot\left[n\ln n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-2\ln n\right]\\
=\ & n^2\ln n\left[n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-2\right]\\
=\ & n^2\ln n\left[n\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-2\right]\\
=\ & n^2\ln n\left[-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
\sim\ & -2n\ln n\quad(n\to\infty).
\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n\ln n}-n^2}{\ln(n!)}=-2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln n}{\ln(n!)}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}{\ln((n+1)!)-\ln(n!)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)}=1+0=1,$$

所以由施笃兹定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln n}{\ln(n!)}=1$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n\ln n}-n^2}{\ln(n!)}=-2$.

草 稿 区

得 分

八、(10分) 设函数$f(x)$在$[-1,1]$无穷次可导，$f^{(n)}(-1)=f^{(n)}(1)=0,\ n=0,1,2,\cdots$，且$f(x)$在$(-1,1)$中恒大于0. 证明：存在正整数$k$, 使得$\dfrac{f(x)}{(1-x^2)^k}$在$(-1,1)$中至少有3个极值点.

证　因为$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^k}=+\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^k}=+\infty$, 所以存在正整数$k$, 使得$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^k}>f(0)$且$\frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^k}>f(0)$. 令$g(x)=\dfrac{f(x)}{(1-x^2)^k}$, 则$g(x)$在$(-1,1)$无穷次可导，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)>g(0)$, $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)>g(0)$.
令$h(x)=\begin{cases}g(x), & x\in(-1,1),\\ 0, & x=\pm1,\end{cases}$ 则由洛必达法则得$\lim\limits_{x\to-1^+}h(x)=\dfrac{1}{2^k}\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)}{(1+x)^k}=\dfrac{1}{2^k}\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f'(x)}{k(1+x)^{k-1}}=\cdots=\dfrac{1}{2^k}\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}=0$, 故$h(x)$在$x=-1$处连续. 同理可证$h(x)$在$x=1$处连续，故$h(x)$在$[-1,1]$连续. 因为$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)>\max\{h(0),h(1)\}$, 所以$h(x)$在$[0,1]$上的最大值在$(0,1)$中取得，记$\xi_1\in(0,1)$是$h(x)$在$[0,1]$上的一个最大值点. 类似地，存在$\xi_2\in(-1,0)$, 使得$\xi_2$是$h(x)$在$[-1,0]$上的一个最大值点，存在$\xi_3\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 使得$\xi_3$是$h(x)$在$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$上的一个最小值点. 显然$\xi_1>\xi_2$, 由$h(\xi_1)\geqslant h\left(\dfrac{1}{2}\right)>h(0)\geqslant h(\xi_3)$知$\xi_1\neq\xi_3$, 同理可知$\xi_2\neq\xi_3$. 因为$\xi_1,\xi_2,\xi_3$都是$h(x)$的极值点，所以$h(x)$在$(-1,1)$中至少有3个极值点，即$\dfrac{f(x)}{(1-x^2)^k}$在$(-1,1)$中至少有3个极值点.

得 分

九、(7分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，$f(0)>0$, $f(1)<1$. 证明：存在$\eta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$和$\xi\in(\eta,1-\eta)$, 使得$f(\xi-\eta)+f(\xi)+f(\xi+\eta)=3\xi$.

证　令$g(x)=f(x)-x$, 则$g(x)$在$[0,1]$连续，$g(0)>0$, $g(1)<0$. 于是由连续函数的局部保号性知存在$\delta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, 使得当$x\in[0,\delta]$时，有$g(x)>0$, 当$x\in[1-\delta,1]$时，有$g(x)<0$. 取$\eta=\dfrac{\delta}{3}\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, 令$h(x)=g(x-\eta)+g(x)+g(x+\eta)$, $x\in[\eta,1-\eta]$, 则$h(x)$在$[\eta,1-\eta]$连续，

$$h(\eta)=g(0)+g(\eta)+g(2\eta)>0,\quad h(1-\eta)=g(1-2\eta)+g(1-\eta)+g(1)<0.$$

由零点存在定理知存在$\xi\in(\eta,1-\eta)$, 使得$h(\xi)=0$, 即$g(\xi-\eta)+g(\xi)+g(\xi+\eta)=0$, 也即$[f(\xi-\eta)-(\xi-\eta)]+[f(\xi)-\xi]+[f(\xi+\eta)-(\xi+\eta)]=0$, 故

$$f(\xi-\eta)+f(\xi)+f(\xi+\eta)=(\xi-\eta)+\xi+(\xi+\eta)=3\xi.$$

草 稿 区

得 分

十、(7分) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，且$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界. 对任意实数h, 令$\varphi(h)=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|$. 已知$\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$, 问$f(x)$是否必在$(-\infty,+\infty)$上一致连续？证明你的结论.

解 $f(x)$必在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，证明如下. 反证. 若不然，则存在$f(x)$满足题设条件，但$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续. 由不一致连续的充分必要条件知，存在$\varepsilon_0>0$和数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, 且$|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$, $n=1,2,\cdots$. 因为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界，所以存在$M>0$, 使得对任意实数x, 都有$|f(x)|\leqslant M$. 令$m=\left[\dfrac{4M}{\varepsilon_0}\right]+1$, 由$\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$知存在$\delta>0$, 使得当$0<|h|<\delta$时，有$\varphi(h)<\dfrac{\varepsilon_0}{m}$. 记$h_n=x_n-y_n$, $n=1,2,\cdots$, 由$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$知对上述的$\delta>0$, 存在正整数$N$, 当$n>N$时，有$|h_n|<\delta$. 令$n=N+1$, 则

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+h_n)+f(x-h_n)-2f(x)|<\frac{\varepsilon_0}{m}. \tag{1}$$

由于$|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$, 不妨设$f(x_n)-f(y_n)\geqslant\varepsilon_0$ ($f(y_n)-f(x_n)\geqslant\varepsilon_0$情形的证明是类似的), 即$f(y_n+h_n)-f(y_n)\geqslant\varepsilon_0$. 由(1)式知对任意实数$x$, 都有

$$f(x+h_n)-f(x)>f(x)-f(x-h_n)-\frac{\varepsilon_0}{m}. \tag{2}$$

由$f(y_n+h_n)-f(y_n)\geqslant\varepsilon_0$出发，反复使用(2)式，就有

$$\begin{aligned}
f(y_n+h_n)-f(y_n) &\geqslant \varepsilon_0,\\
f(y_n+2h_n)-f(y_n+h_n) &> f(y_n+h_n)-f(y_n)-\frac{\varepsilon_0}{m}\geqslant\frac{m-1}{m}\varepsilon_0,\\
f(y_n+3h_n)-f(y_n+2h_n) &> f(y_n+2h_n)-f(y_n+h_n)-\frac{\varepsilon_0}{m}\geqslant\frac{m-2}{m}\varepsilon_0,\\
&\cdots\\
f(y_n+mh_n)-f(y_n+(m-1)h_n) &> f(y_n+(m-1)h_n)-f(y_n+(m-2)h_n)-\frac{\varepsilon_0}{m}\geqslant\frac{1}{m}\varepsilon_0.
\end{aligned}$$

上面这m个不等式相加，得

$$f(y_n+mh_n)-f(y_n)\geqslant\left(1+\frac{m-1}{m}+\frac{m-2}{m}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\varepsilon_0=\frac{m+1}{2}\varepsilon_0.$$

因为$m=\left[\dfrac{4M}{\varepsilon_0}\right]+1$, 所以$m\varepsilon_0>4M$. 于是$f(y_n+mh_n)-f(y_n)\geqslant\dfrac{m+1}{2}\varepsilon_0>2M$, 与$|f(x)|\leqslant M$矛盾！