

2019—2020 第一学期《数学分析III》期末考试

命题人：刘锐

一、(10分) (1) 计算积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ ($a > 1$)

(10分) (2) 判断积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$ 敛散性

二、(10分) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{x}}$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上一致收敛

三、(10分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ 的收敛域

四、(15分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和函数

五、(15分) 设周期为 2π 的函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{4} & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, 求其傅里叶级

数和, 并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

六、(10分) 计算积分 $I(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + \theta^2 \cos^2 x) dx$

七、(10分) 讨论含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin \alpha t}{t} dt$ 在 $0 < \alpha < \infty$ 上的一致收敛性

八、(10分) 设连续函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上满足正交归一性, 即

$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$, 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上黎曼可积, 设

$\alpha_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$, 试证明:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ 收敛

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx$

(17 物理, 雨濠整理, 如有纰漏, 还请见谅, 另外十分感谢 15 级滕安琪学姐在回忆考题时提供的帮助)