数理科学与大数据本科生2020 — 2021学年第一学期“数学分析I”月考3试卷

草 稿 区

任课教师: **学号:** **姓名:** **成绩:**

一	二	三	四	五	六

得 分

一、(15分) 求函数$f(x)=x^2-4x\sin x-4\cos x$在$(-\pi,\pi)$中的极大值点与极小值点.

解 对$f(x)$求导，得

$$f'(x)=2x-4\sin x-4x\cos x+4\sin x=2x(1-2\cos x).$$

由$f'(x)=0$得$x=0$或$\cos x=\dfrac{1}{2}$, 故$f(x)$在$(-\pi,\pi)$中有三个驻点$x_1=0$, $x_2=-\dfrac{\pi}{3}$和$x_3=\dfrac{\pi}{3}$. 对$f'(x)=2x-4x\cos x$求导，得

$$f''(x)=2-4\cos x+4x\sin x.$$

因为$f''(0)=-2<0$, 所以由二阶导数判别法知$x_1=0$是$f(x)$的极大值点；因为$f''\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi>0$, 所以由二阶导数判别法知$x_2=-\dfrac{\pi}{3}$和$x_3=\dfrac{\pi}{3}$是$f(x)$的极小值点.

因此，函数$f(x)=x^2-4x\sin x-4\cos x$在$(-\pi,\pi)$中的极大值点为0, 极小值点为$-\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{\pi}{3}$.

草 稿 区

得 分

二、(30分) 求下列各不定积分.

(1) $\displaystyle\int e^x \sin x \cos x \mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 记$I = \displaystyle\int e^x \sin 2x \mathrm{d}x$, 则由分部积分法得

$$\begin{aligned} I &= e^x \sin 2x - \int e^x \cdot 2\cos 2x \mathrm{d}x \\ &= e^x \sin 2x - \left(2e^x \cos 2x - \int e^x \cdot (-4\sin 2x)\mathrm{d}x\right) \\ &= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4I. \end{aligned}$$

因此,

$$I = \frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + C.$$

从而

$$\int e^x \sin x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^x \sin 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}I = \frac{1}{10}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + C.$$

(2)

$$\begin{aligned} &\int \frac{x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^{2t}-1}}\ (t = x^2\text{换元}) = \frac{1}{2}\int \frac{e^{-t}\mathrm{d}t}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \\ =\ & \frac{1}{2}\int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\ (u = e^{-t}\text{换元}) = -\frac{1}{2}\arcsin u + C = -\frac{1}{2}\arcsin\left(e^{-x^2}\right) + C. \end{aligned}$$

(2)的另解 令$t = \sqrt{e^{2x^2}-1}$, 则$2x^2 = \ln(1+t^2)$. 上式两边求微分得$4x\mathrm{d}x = \dfrac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$, 故$x\mathrm{d}x = \dfrac{t}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t$. 于是有

$$\begin{aligned} &\int \frac{x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{t}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ =\ & \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan\left(\sqrt{e^{2x^2}-1}\right) + C. \end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

三、(15分) 设n是正整数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$都是正实数. 记$a=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 证明：

$$a^{na}\leqslant\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}.$$

证 令$f(x)=x\ln x$, 则$f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\dfrac{1}{x}$. 因为$f''(x)$在$(0,+\infty)$恒正，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$严格下凸. 由詹森不等式得

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot a_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(a_i).$$

由$f(x)=x\ln x$和$a=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$知上式就是

$$a\ln a\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\ln a_i.$$

于是$a^a\leqslant\left(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i^{a_i}\right)^{\frac{1}{n}}$, 故

$$a^{na}\leqslant\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}.$$

草 稿 区

得 分

四、(15分) 设函数$f(x)$在$[-1,1]$上三次可导，$f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$. 证明：存在$\xi\in(-1,1)$, 使得$f'''(\xi)=3$.

证 由泰勒公式，有

$$0=f(-1)=f(0)+f'(0)(-1-0)+\frac{f''(0)}{2}(-1-0)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{6}(-1-0)^3=f(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\xi_1)}{6},$$

其中$-1<\xi_1<0$,

$$1=f(1)=f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{f''(0)}{2}(1-0)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{6}(1-0)^3=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi_2)}{6},$$

其中$0<\xi_2<1$. 后式减去前式，得

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}=1.$$

若$f'''(\xi_1)=3$, 则取$\xi=\xi_1$即可；若$f'''(\xi_1)\neq 3$, 则$f'''(\xi_1)$和$f'''(\xi_2)$中一个小于3, 另一个大于3, 由达布定理知存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(-1,1)$, 使得$f'''(\xi)=3$.

草 稿 区

得 分

五、(15分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{|x|}=+\infty$. 证明：$f'(x)$的值域是$(-\infty,+\infty)$.

证 为证明$f'(x)$的值域是$(-\infty,+\infty)$, 只需证明对任意实数c, 都存在实数ξ, 使得$f'(\xi)=c$. 由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{|x|}=+\infty$知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\text{且}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{-x}=+\infty.$$

由$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=+\infty.$$

于是存在$x_1>0$, 使得$\dfrac{f(x_1)-f(0)}{x_1}>c$. 由拉格朗日中值定理知存在$\xi_1\in(0,x_1)$, 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1},$$

从而$f'(\xi_1)>c$; 同理，由$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{-x}=+\infty$得

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty.$$

于是存在$x_2<0$, 使得$\dfrac{f(x_2)-f(0)}{x_2}<c$. 由拉格朗日中值定理知存在$\xi_2\in(x_2,0)$, 使得

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(0)}{x_2},$$

从而$f'(\xi_2)<c$. 由达布定理知存在$\xi\in(\xi_2,\xi_1)$, 使得$f'(\xi)=c$. 这就完成了证明.

另证 为证明$f'(x)$的值域是$(-\infty,+\infty)$, 只需证明对任意实数c, 都存在实数ξ, 使得$f'(\xi)=c$. 令
$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$ 则由$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导知$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续. 由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{|x|}=+\infty$得

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{f(0)}{x}=+\infty\text{且}\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{f(0)}{x}=-\infty.$$

若$c=g(0)=f'(0)$, 则取$\xi=0$, 就使得$f'(\xi)=c$; 若$c\neq g(0)$, 则不妨设$c>g(0)$, 由$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$知存在$x_1>0$, 使得$g(x_1)>c$, 故由介值定理知存在$\eta\in(0,x_1)$, 使得$g(\eta)=c$, 即$\dfrac{f(\eta)-f(0)}{\eta}=c$, 再由拉格朗日中值定理知存在$\xi\in(0,\eta)$, 使得$f'(\xi)=c$. 这就完成了证明.

草 稿 区

得 分

六、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[2n^2\left(\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)-\mathrm{e}n\right]$.

解 先求函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x^2\left(\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)-\mathrm{e}x\right]$. 当$x\to+\infty$时，有

$$\begin{aligned}
& x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\\
= \ & x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-1\\
= \ & -\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

于是当$x\to+\infty$时，有

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}\\
= \ & 1+\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
= \ & 1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to+\infty}\left[2x^2\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)-\mathrm{e}x\right]\\
= \ & \mathrm{e}\lim_{x\to+\infty}\left[2x^2\left(1-\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\mathrm{e}}\right)-x\right]\\
= \ & \mathrm{e}\lim_{x\to+\infty}\left[2x^2\cdot\left(\frac{1}{2x}-\frac{11}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\right]\\
= \ & \mathrm{e}\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{11}{12}+o(1)\right]\\
= \ & -\frac{11}{12}\mathrm{e}.
\end{aligned}$$

由海涅定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[2n^2\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)-\mathrm{e}n\right]=-\frac{11}{12}\mathrm{e}.$$